

〔解答〕

(1)	$\frac{3-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{3+\sqrt{5}}{2}$	
(2)	a	$\frac{5\sqrt{3}}{3}$
	b	$\frac{4\sqrt{3}}{3}$

〔解説〕

(1)

与えられた不等式は、

$$\begin{aligned}
 & -(x-2)^2 + 5 > x^2 - 2x + 3 \\
 & \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 < 0 \\
 & \Leftrightarrow \left(x - \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) \left(x - \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) < 0 \\
 & \therefore \frac{3-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{3+\sqrt{5}}{2}
 \end{aligned}$$

と解くことができる。

(2)

平面上の3点 $(0, 0)$, $(a, 1)$, $(b, -2)$ が正三角形の頂点となるということは、これら各点間の距離が等しいということである。従って、

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{a^2 + 1^2} = \sqrt{b^2 + (-2)^2} \\
 & \Leftrightarrow a^2 + 1 = b^2 + 4 \\
 & \Leftrightarrow a^2 - b^2 - 3 = 0 \quad \dots \textcircled{1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{a^2 + 1^2} = \sqrt{(a-b)^2 + 3^2} \\
 & \Leftrightarrow a^2 + 1 = (a-b)^2 + 9 \\
 & \Leftrightarrow b^2 - 2ab + 8 = 0 \quad \dots \textcircled{2}
 \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで、 $b > 0$ であるから、②より、

$$a = \frac{b}{2} + \frac{4}{b} \quad \dots \textcircled{3}$$

を得る。これを①に代入することで、

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{b}{2} + \frac{4}{b}\right)^2 - b^2 - 3 = 0 \\
 & \Leftrightarrow \frac{3b^2}{4} - 1 - \frac{16}{b^2} = 0 \\
 & \Leftrightarrow 3(b^2)^2 - 4b^2 - 64 = 0 \\
 & \Leftrightarrow (b^2 + 4)(3b^2 - 16) = 0 \\
 & \therefore b^2 = \frac{16}{3} \quad (\because b^2 > 0)
 \end{aligned}$$

を得るが、 $b > 0$ より、

$$b = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

であることが分かる。これを③に代入し、

$$a = \frac{b}{2} + \frac{4}{b} = \frac{2}{\sqrt{3}} + \sqrt{3} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

を得る。

(1)

与えられた5つの数字には1と3が2つずつ含まれているので、それを並び替えて得られる5桁の自然数は全部で

$$\frac{5!}{2!2!} = 30 \text{ 個}$$

存在する。

(答) 30 個

(2)

ある桁の値に注目すると、その値が1となるような並べ方は、他の桁の値の並びを考えると

$$\frac{4!}{2!} = 12 \text{ 通り}$$

存在する。同様にある桁の値が2である並べ方は、

$$\frac{4!}{2!2!} = 6 \text{ 通り}$$

存在し、同様にある桁の値が3である並べ方は、

$$\frac{4!}{2!} = 12 \text{ 通り}$$

存在する。従って、与えられた5つの数字を並べ替えて得られる5桁の自然数の 10^n の位のみを考えたときの総和は、

$$(1 \cdot 12 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 12)10^n = 60 \cdot 10^n$$

である。従って、与えられた5つの数字を並べ替えて得られる5桁の自然数の総和は、

$$\sum_{n=0}^4 60 \cdot 10^n = 60 \cdot \frac{10^5 - 1}{10 - 1} = 666660$$

と求めることができる。

(答) 666660

θ が第2象限の角であることより、 $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ として一般性を失わない。このとき、 $\cos \theta = -\frac{3}{4}$

より、

$$12 > 9 > 8$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{3} > 3 > 2\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\sqrt{3}}{2} < -\frac{3}{4} < -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos \frac{5}{6}\pi < \cos \theta < \cos \frac{3}{4}\pi$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{4}\pi < \theta < \frac{5}{6}\pi \left(\because \frac{\pi}{2} < \theta < \pi \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{9}{4}\pi < 3\theta < \frac{5}{2}\pi$$

を得る。以上より、 3θ は第1象限の角である。

(答) 第1象限

(1)

曲線 C の方程式を x で微分すると,

$$y' = 3x^2 - \frac{4}{3}$$

となる。従って、曲線 C 上の点 $P\left(t, t^3 - \frac{4}{3}t\right)$ における接線 L の方程式は,

$$y = \left(3t^2 - \frac{4}{3}\right)(x - t) + t^3 - \frac{4}{3}t = \left(3t^2 - \frac{4}{3}\right)x - 2t^3$$

と表される。 C と L の交点のうち P 以外のものが Q であるから、 Q の x 座標は,

$$\begin{aligned} x^3 - \frac{4}{3}x &= \left(3t^2 - \frac{4}{3}\right)x - 2t^3 \\ \Leftrightarrow x^3 - 3t^2x + 2t^3 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x - t)^2(x + 2t) &= 0 \\ \therefore x &= -2t \quad (\because x \neq t) \end{aligned}$$

と分かる。従って、 Q における C の接線の傾きは,

$$3(-2t)^2 - \frac{4}{3} = 12t^2 - \frac{4}{3}$$

であるから、この接線が L と直交するような t の値は,

$$\begin{aligned} \left(12t^2 - \frac{4}{3}\right)\left(3t^2 - \frac{4}{3}\right) &= -1 \\ \Leftrightarrow 36(t^2)^2 - 20t^2 + \frac{25}{9} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(6t^2 - \frac{5}{3}\right)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow t^2 &= \frac{5}{18} \\ \therefore t &= \frac{\sqrt{10}}{6} \quad (\because t > 0) \end{aligned}$$

と求めることができる。

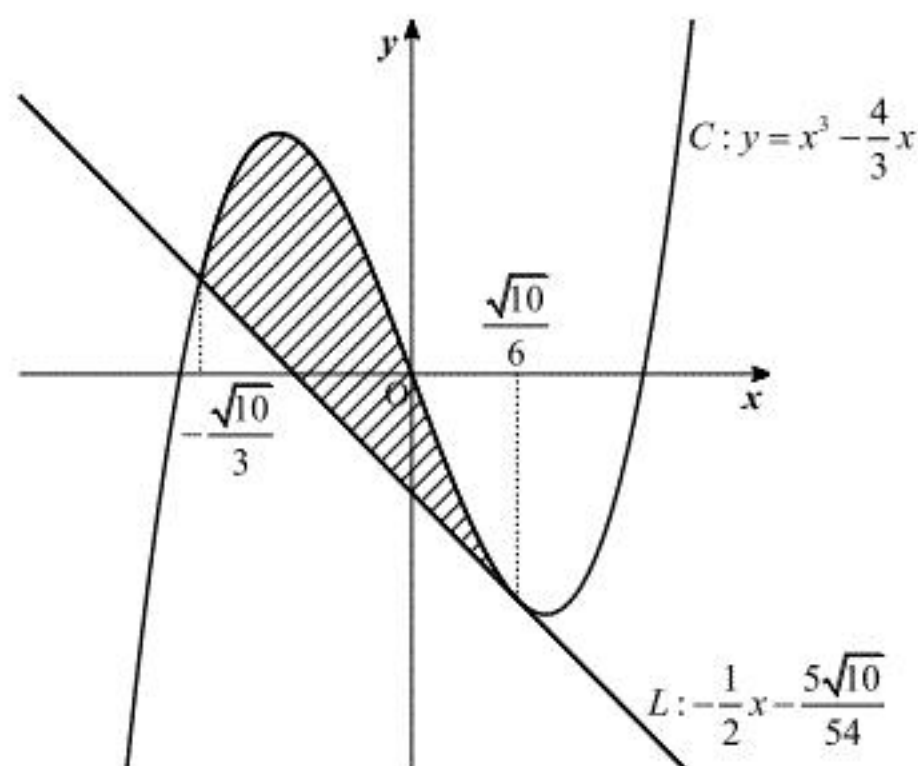
$$(\text{答}) \quad t = \frac{\sqrt{10}}{6}$$

(2)

t が (1) で求めた値をとるとき、 L の方程式は,

$$y = \left\{3 \cdot \left(\frac{\sqrt{10}}{6}\right)^2 - \frac{4}{3}\right\}x - 2\left(\frac{\sqrt{10}}{6}\right)^3 = -\frac{1}{2}x - \frac{5\sqrt{10}}{54}$$

となる。従って、求める面積は以下の図の斜線部である。



図より、 C と L とで囲まれた部分の面積は,

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\sqrt{10}}{3}}^{\frac{\sqrt{10}}{6}} \left\{ \left(x^3 - \frac{4}{3}x\right) - \left(-\frac{1}{2}x - \frac{5\sqrt{10}}{54}\right) \right\} dx &= \int_{-\frac{\sqrt{10}}{3}}^{\frac{\sqrt{10}}{6}} \left(x^3 - \frac{5}{6}x + \frac{5\sqrt{10}}{54}\right) dx \\ &= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{5}{12}x^2 + \frac{5\sqrt{10}}{54}x \right]_{-\frac{\sqrt{10}}{3}}^{\frac{\sqrt{10}}{6}} \\ &= \frac{25}{48} \end{aligned}$$

と求めることができる。

$$(\text{答}) \quad \frac{25}{48}$$