

〔解答〕

(1)	$\frac{b}{2a}$
(2)	$r=16\sqrt{2}, \theta=\frac{17}{12}\pi$

〔解説〕

(1)

与式 $x \sin(\sqrt{a^2x^2+b}-ax)$ を $x>0$ として変形すると,

$$\begin{aligned}
 x \sin(\sqrt{a^2x^2+b}-ax) &= x \sin \left\{ \frac{(\sqrt{a^2x^2+b}-ax)(\sqrt{a^2x^2+b}+ax)}{\sqrt{a^2x^2+b}+ax} \right\} \\
 &= x \sin \left(\frac{b}{\sqrt{a^2x^2+b}+ax} \right) \\
 &= \frac{bx}{\sqrt{a^2x^2+b}+ax} \cdot \frac{\sin \left(\frac{b}{\sqrt{a^2x^2+b}+ax} \right)}{\frac{b}{\sqrt{a^2x^2+b}+ax}} \\
 &= \frac{b}{\sqrt{a^2+\frac{b}{x^2}}+a} \cdot \frac{\sin \left(\frac{b}{\sqrt{a^2x^2+b}+ax} \right)}{\frac{b}{\sqrt{a^2x^2+b}+ax}}
 \end{aligned}$$

となる。ここで、 a, b は正の実数であるから,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{b}{\sqrt{a^2+\frac{b}{x^2}}+a} = \frac{b}{2a}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{b}{\sqrt{a^2x^2+b}+ax} = 0$$

が成り立つ。よって、 $\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2x^2+b}+ax}$ とおくと

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \left(\frac{b}{\sqrt{a^2x^2+b}+ax} \right)}{\frac{b}{\sqrt{a^2x^2+b}+ax}} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$$

となる。以上より、求める答えは

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin(\sqrt{a^2x^2+b}-ax) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{b}{\sqrt{a^2+\frac{b}{x^2}}+a} \cdot \frac{\sin \left(\frac{b}{\sqrt{a^2x^2+b}+ax} \right)}{\frac{b}{\sqrt{a^2x^2+b}+ax}} = \frac{b}{2a}$$

である。

(2)

複素数 $z=1+\sqrt{3}i$ と $w=\frac{1}{-1+i}$ は極座標表示をするとそれぞれ

$$z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

$$\begin{aligned}
 w &= \frac{1}{-1+i} \\
 &= \frac{-1-i}{(-1+i)(-1-i)} \\
 &= \frac{1}{2}(-1-i) \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos \frac{5}{4}\pi + i \sin \frac{5}{4}\pi \right)
 \end{aligned}$$

となる。よって、 z^8w^7 は極座標表示をすると

$$\begin{aligned}
 z^8w^7 &= 2^8 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^7 \left(\cos \frac{8}{3}\pi + i \sin \frac{8}{3}\pi \right) \left(\cos \frac{35}{4}\pi + i \sin \frac{35}{4}\pi \right) \\
 &= 16\sqrt{2} \left(\cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi \right) \left(\cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\pi \right) \\
 &= 16\sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{2}{3} + \frac{3}{4} \right) \pi + i \sin \left(\frac{2}{3} + \frac{3}{4} \right) \pi \right) \\
 &= 16\sqrt{2} \left(\cos \frac{17}{12}\pi + i \sin \frac{17}{12}\pi \right)
 \end{aligned}$$

と表せる。以上より、 z^8w^7 の絶対値 r と偏角 θ は

$$\begin{cases} r=16\sqrt{2} \\ \theta=\frac{17}{12}\pi \end{cases}$$

となる。

(1)

$3n^3+n, n^3+1$ に対し, ユークリッド互除法を用いると,

$3n^3+n$ を n^3+1 で割った余りは $n-3$

n^3+1 を $n-3$ で割った余りは $3^3+1=28$

より, g は $n-3$ と 28 の最大公約数である。 28 は 5 で割り切れないため, $g \neq 5$ である。

(証明終)

(2)

$n-3$ と 28 の最大公約数が 14 となればよい。 $n-3 > -3$ であり, 28 との最大公約数が 14 となる -3 より大きい最小の整数は 14 であるから, $g=14$ となるような n の最小値は,

$$n+3=14 \Leftrightarrow n=17$$

である。

(答) $n=17$

(1)

a, b, c がすべて異なる目であるとき、その a, b, c の目の組み合わせは

$${}_6C_3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$$

で 20 通り存在する。その目の組み合わせそれぞれに対して、 a, b, c への対応は、

$${}_3P_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

で 6 通り存在する。以上から、 a, b, c がすべて異なる目である出方は、

$$20 \cdot 6 = 120$$

で 120 通り存在する。このうち、 $a+b+c=9$ となる a, b, c の目の組み合わせは

$$(1, 2, 6)(1, 3, 5)(2, 3, 4)$$

の 3 通り存在する。その目の組み合わせそれぞれに対して、 a, b, c への対応は、6 通り存在する。以上から、 a, b, c がすべて異なる目であり $a+b+c=9$ となる出方は、

$$3 \cdot 6 = 18$$

で 18 通り存在する。求める確率は、

$$\frac{18}{120} = \frac{3}{20}$$

となる。

(答) $\frac{3}{20}$

(2)

$$\begin{aligned} \cos 3x + 4 \cos 2x - 8 \cos x &= 4 \cos^3 x - 3 \cos x + 4(2 \cos^2 x - 1) - 8 \cos x \\ &= 4 \cos^3 x + 8 \cos^2 x - 11 \cos x - 4 \end{aligned}$$

である。また、 x が実数全体を動くとき、 $-1 \leq \cos x \leq 1$ であるから、

$$f(t) = 4t^3 + 8t^2 - 11t - 4$$

の $-1 \leq t \leq 1$ における値域を考えればよい。ここで、

$$f'(t) = 12t^2 + 16t - 11 = (2t-1)(6t+11)$$

であるから、 $f(t)$ の増減表は以下のようになる。

t	-1	...	$\frac{1}{2}$	...	1
$f'(t)$	-	-	0	+	+
$f(t)$		$\searrow$		$\nearrow$	

$$f(-1) = 4 \cdot (-1)^3 + 8 \cdot (-1)^2 - 11 \cdot (-1) - 4 = 11$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 11 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) - 4 = -7$$

$$f(1) = 4 \cdot 1^3 + 8 \cdot 1^2 - 11 \cdot 1 - 4 = -3$$

であるから、最大値は 11、最小値は -7 となる。

(答) 最大値: 11, 最小値: -7

(1)

$$f'(x) = \frac{x^2 + 1 - x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2}$$

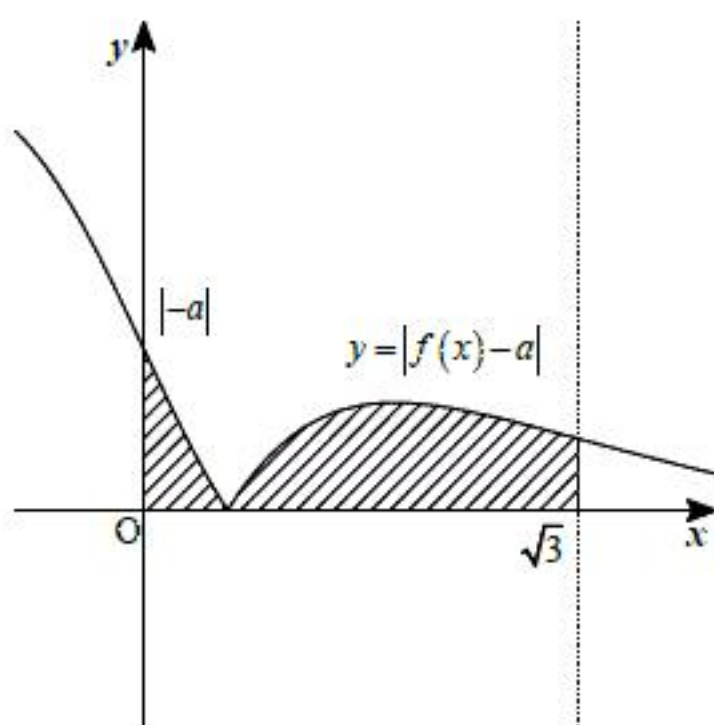
であるので、増減表は以下のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$

したがって、 $f(x)$ の極大値は $x=1$ のとき $\frac{1}{2}$ であり、極小値は $x=-1$ のとき $-\frac{1}{2}$ である。

(答) 極大値 $\frac{1}{2}$ ($x=1$ のとき), 極小値 $-\frac{1}{2}$ ($x=-1$ のとき)

(2)



V は上図の斜線部を x 軸の回りに1回転してできる立体の体積なので、

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\sqrt{3}} \pi \{f(x) - a\}^2 dx \\ &= \pi \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2} dx - 2a\pi \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{x^2 + 1} dx + a^2\pi \int_0^{\sqrt{3}} dx \end{aligned}$$

となる。 $x = \tan \theta$ と置換すると $\frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta}$ であり、

x	0	$\rightarrow$	$\sqrt{3}$
θ	0	$\rightarrow$	$\frac{\pi}{3}$

となるので、

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\tan^2 \theta}{\left(\frac{1}{\cos^2 \theta}\right)^2} \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 \theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta \\ &= \left[\frac{1}{2} \theta - \frac{1}{4} \sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8} \end{aligned}$$

である。また、

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}} \frac{(x^2 + 1)'}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} [\log |x^2 + 1|]_0^{\sqrt{3}} = \log 2$$

である。したがって、

$$\begin{aligned} V &= \pi \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8} \right) - 2a\pi \log 2 + \sqrt{3}a^2\pi \\ &= \pi \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8} - 2a \log 2 + \sqrt{3}a^2 \right) \end{aligned}$$

である。

$$(答) V = \pi \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8} - 2a \log 2 + \sqrt{3}a^2 \right)$$

(3)

V を平方完成すると

$$V = \pi \left\{ \sqrt{3} \left(a - \frac{\sqrt{3} \log 2}{3} \right)^2 + \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{\sqrt{3}}{3} (\log 2)^2 \right\}$$

となるので、 $a = \frac{\sqrt{3} \log 2}{3}$ のとき最小値 $\pi \left\{ \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{\sqrt{3}}{3} (\log 2)^2 \right\}$ をとる。

$$(答) a = \frac{\sqrt{3} \log 2}{3} \text{ のとき最小値 } \pi \left\{ \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{\sqrt{3}}{3} (\log 2)^2 \right\}$$