

〔解答〕

(1)	解答例: $(x, y) = (3, -7)$ (※ $(x, y) = (11m + 3, -26m - 7)$ を満たす整数 m が存在するものであればよい)
(2)	$(x, y) = (1, 27), (12, 1)$

〔解説〕

(1)

$x = 1, 2, 3, \dots$ の順で, $26x + 11y$ の絶対値が小さくなるように (x, y) の値を代入していくと

$$26 \cdot 1 + 11 \cdot (-2) = 4$$

$$26 \cdot 2 + 11 \cdot (-5) = -3$$

$$26 \cdot 3 + 11 \cdot (-7) = 1$$

となる。したがって, $(x, y) = (3, -7)$ は問題文の条件を満たす。また,

$$26x + 11y = 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$26 \cdot 3 + 11 \cdot (-7) = 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

の両辺について, $\textcircled{1} - \textcircled{2}$ を考えると

$$26(x - 3) + 11(y + 7) = 0$$

となり, ここで 26 と 11 は互いに素であるから, この式の整数解は, 整数 m を用いて

$$\begin{cases} x - 3 = 11m \\ y + 7 = -26m \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (11m + 3, -26m - 7)$$

と表せるものすべてであることがわかる。

(2)

まず, $26x + 11y = 323$ の整数解を考える。②の両辺を 323 倍すると

$$26 \cdot 969 + 11 \cdot (-2261) = 323$$

となるから, (1) と同様に考えると, 求める整数解は, 整数 n を用いて

$$(x, y) = (11n + 969, -26n - 2261)$$

と表せるものすべてであることがわかる。ここで, x, y が自然数であるための条件は

$$1 \leq 11n + 969 \quad \text{かつ} \quad 1 \leq -26n - 2261$$

$$\Leftrightarrow -88 \leq n \quad \text{かつ} \quad n \leq -87$$

となるから, 求める自然数の組 (x, y) は $n = -88, -87$ の場合であり, このとき, それぞれ

$$(x, y) = (1, 27), (12, 1)$$

となる。

(1)

白玉4個、黒玉8個の入った袋から、6つの玉を同時に取り出すとき、取り出し方の総数は ${}_{12}C_6$ 通りであり、これらは同様に確からしく起こる。

6つの玉の中に黒玉が4つ以上含まれている場合の数をまとめると、以下の表のようになる。

(白玉数, 黒玉数)	(2, 4)	(1, 5)	(0, 6)
場合の数	${}_4C_2 \cdot {}_8C_4$	${}_4C_1 \cdot {}_8C_5$	${}_4C_0 \cdot {}_8C_6$

したがって、求める確率は

$$\frac{{}_4C_2 \cdot {}_8C_4 + {}_4C_1 \cdot {}_8C_5 + {}_4C_0 \cdot {}_8C_6}{{}_{12}C_6} = \frac{6 \cdot 70 + 4 \cdot 56 + 1 \cdot 28}{924} = \frac{672}{924} = \frac{8}{11}$$

となる。

(答) $\frac{8}{11}$

(2)

以下のように事象を定める。

A : 「6つの玉の中に黒玉が4つ以上含まれている」事象

B : 「さらに袋から取り出した2つの玉が、白と黒1つずつである」事象

このとき、求める確率は条件付き確率 $P_A(B) \left(= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \right)$ である。(1)の結果より $P(A) = \frac{8}{11}$ で

あるから、 $P(A \cap B)$ の値を求めればよいことがわかる。ここで、白玉4個、黒玉8個の入った袋から、6つの玉を同時に取り出し、さらに袋から2つの玉を同時取り出すときの取り出し方の総数は ${}_{12}C_6 \cdot {}_6C_2$ 通りであり、これらは同様に確からしく起こる。

また、6つの玉の中に黒玉が4つ以上含まれ、さらに取り出した2つの玉が白と黒1つずつである場合の数をまとめると、以下の表のようになる。

(白玉数, 黒玉数)	(2, 4)の後(1, 1)	(1, 5)の後(1, 1)	(0, 6)の後(1, 1)
場合の数	$({}_4C_2 \cdot {}_8C_4) \cdot ({}_2C_1 \cdot {}_4C_1)$	$({}_4C_1 \cdot {}_8C_5) \cdot ({}_3C_1 \cdot {}_3C_1)$	$({}_4C_0 \cdot {}_8C_6) \cdot ({}_4C_1 \cdot {}_2C_1)$

したがって、 $P(A \cap B)$ の値は

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= \frac{({}_4C_2 \cdot {}_8C_4) \cdot ({}_2C_1 \cdot {}_4C_1) + ({}_4C_1 \cdot {}_8C_5) \cdot ({}_3C_1 \cdot {}_3C_1) + ({}_4C_0 \cdot {}_8C_6) \cdot ({}_4C_1 \cdot {}_2C_1)}{{}_{12}C_6 \cdot {}_6C_2} \\ &= \frac{420 \cdot 8 + 224 \cdot 9 + 28 \cdot 8}{924 \cdot 15} \\ &= \frac{5600}{13860} \\ &= \frac{40}{99} \end{aligned}$$

であるから、求める確率 $P_A(B)$ は

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{40}{99}}{\frac{8}{11}} = \frac{5}{9}$$

となる。

(答) $\frac{5}{9}$

〔解答〕

(1)	$x = 2, 3 + \sqrt{5}$
(2)	$n = 105$

〔解説〕

(1)

方程式 $\log_2 \sqrt{x} - \log_8 (x-1) = \frac{1}{2}$ を解く。まず、真数条件より

$$\sqrt{x} > 0 \quad \text{かつ} \quad x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

である。この条件の下に、底の変換公式を用いることで

$$\frac{1}{2} \log_2 x - \frac{\log_2 (x-1)}{\log_2 8} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 3 \log_2 x - 2 \log_2 (x-1) = 3$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x^3 = \log_2 8 + \log_2 (x-1)^2$$

$$\Leftrightarrow x^3 = 8(x-1)^2$$

と変形でき、さらに、この3次方程式を解くと

$$x^3 - 8x^2 + 16x - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x^2 - 6x + 4) = 0$$

$$\therefore x = 2, 3 \pm \sqrt{5}$$

となる。ここで、 $\sqrt{5} > 2$ であるから、真数条件と合わせて、求める解は $x = 2, 3 + \sqrt{5}$ となる。

(2)

不等式 $(1.08)^n > 3000$ を満たす最小の自然数 n を求める。両辺の常用対数をとると

$$\log_{10} (1.08)^n > \log_{10} 3000 \Leftrightarrow n \log_{10} \left(\frac{2^2 \cdot 3^3}{100} \right) > \log_{10} (3 \cdot 10^3)$$

となる。ここで、 $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ とするとき

$$\log_{10} \left(\frac{2^2 \cdot 3^3}{100} \right) = 2 \cdot 0.3010 + 3 \cdot 0.4771 - 2 = 0.0333$$

$$\log_{10} (3 \cdot 10^3) = 0.4771 + 3 = 3.4771$$

となるから、与えられた不等式は

$$0.0333 \cdot n > 3.4771 \Leftrightarrow n > \frac{3.4771}{0.0333}$$

と変形できる。そして、右辺の分数について

$$\frac{3.4771}{0.0333} = \frac{34771}{333} = 104 + \frac{139}{333}$$

となるから、求める自然数は

$$n = 105$$

であることがわかる。

3 次方程式 $x^3 + ax^2 - a^2x - 5 = 0$ が相異なる 3 つの実数解をもつような条件を求める。関数 $f(x)$ を

$$f(x) = x^3 + ax^2 - a^2x - 5$$

とおくと、条件は

「 $f(x)$ は極大値、極小値をもつ」 かつ 「極大値と極小値は異符号となる」

$\Leftrightarrow$ 2 次方程式 $f'(x) = 0$ は相異なる 2 つの実数解 α, β をもち、 $f(\alpha)f(\beta) < 0$ となる
と変形できる。ここで、導関数 $f'(x)$ を計算すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 + 2ax - a^2 \\ &= (3x - a)(x + a) \end{aligned}$$

となるから、2 次方程式 $f'(x) = 0$ の解は

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -a, \frac{a}{3}$$

となるため、求める条件は

$$-a \neq \frac{a}{3} \quad \text{かつ} \quad f(-a)f\left(\frac{a}{3}\right) < 0$$

$$\Leftrightarrow a \neq 0 \quad \text{かつ} \quad (a^3 - 5)\left(-\frac{5}{27}a^3 - 5\right) < 0$$

$$\Leftrightarrow (a^3 - 5)(a^3 + 27) > 0$$

$$\Leftrightarrow a^3 < -27, 5 < a^3$$

$$\Leftrightarrow a < -3, 5^{\frac{1}{3}} < a$$

であることがわかる。

(答) $a < -3, 5^{\frac{1}{3}} < a$