

〔解答〕

	初項	公比
(1)	$-1+\sqrt{5}$	$\frac{3-\sqrt{5}}{2}$
(2)	$(a+b)^2$	

〔解説〕

(1)

無限等比数列 $\{a_n\}$ の初項を a 、公比を r とおく。 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 2$ より、無限等比級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束するから、その公比 r は

$$-1 < r < 1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

を満たす。また、 $\textcircled{1}$ が満たされるとき、

$$-1 < r^3 < 1$$

となり、無限等比級数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^3$ も収束する。このとき、

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n &= \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r} \\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n^3 &= \sum_{n=1}^{\infty} (ar^{n-1})^3 = \sum_{n=1}^{\infty} a^3 (r^3)^{n-1} = \frac{a^3}{1-r^3} \end{aligned}$$

と表せるから、 $\textcircled{1}$ のもとで、

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n^3 = 2 \\ \Leftrightarrow \frac{a}{1-r} &= \frac{a^3}{1-r^3} = 2 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{1-r} = 2 \\ \frac{a^3}{1-r^3} = 2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2(1-r) \\ a^3 = 2(1-r^3) \end{cases} \end{aligned}$$

となる。2式より a を消去して、

$$\begin{aligned} \{2(1-r)\}^3 &= 2(1-r^3) \\ \Leftrightarrow 8(1-r)(1-2r+r^2) - 2(1-r)(1+r+r^2) &= 0 \\ \Leftrightarrow 6(r-1)(r^2-3r+1) &= 0 \\ \Leftrightarrow r = 1, \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

となる。 $2 < \sqrt{5} < 3$ であるから、 $\textcircled{1}$ を満たすのは

$$r = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

である。このとき、

$$a = 2(1-r) = 2 \cdot \left(1 - \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) = -1 + \sqrt{5}$$

である。以上より、無限等比数列 $\{a_n\}$ の初項は $-1+\sqrt{5}$ 、公比は $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ である。

(2)

$f(x) = \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{1-x}$ であるとき、

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{(1-x)^2} \\ &= \frac{-a^2(1-x)^2 + b^2x^2}{x^2(1-x)^2} \end{aligned}$$

となる。 $0 < x < 1$ のとき $x^2(1-x)^2 > 0$ であるから、

$$g(x) = -a^2(1-x)^2 + b^2x^2 = (b^2 - a^2)x^2 + 2a^2x - a^2 \text{ とおく。} a > 0, b > 0 \text{ より、} b^2 - a^2 = 0 \Leftrightarrow a = b$$

であるから、以下の2つの場合に分けて考える。

[1] $a \neq b$ の場合

$$\begin{aligned} g(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow (b^2 - a^2)x^2 + 2a^2x - a^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \{(b-a)x + a\}\{(b+a)x - a\} &= 0 \\ \Leftrightarrow x = \frac{a}{a-b}, \frac{a}{a+b} \quad (\because a-b \neq 0, a+b \neq 0) \end{aligned}$$

となる。ここで $0 < a < a+b$ より、

$$0 < \frac{a}{a+b} < 1$$

である。また、 $a < b$ の場合は

$$\frac{a}{a-b} < 0$$

であり、 $a > b$ の場合は $0 < a-b < a$ より、

$$\frac{a}{a-b} > 1$$

である。よって、 $g(0) = -a^2 < 0$ 、 $g(1) = b^2 > 0$ であることから、 $g(x)$ の $0 \leq x \leq 1$ における符号は下図のようになる。

x	0	...	$\frac{a}{a+b}$	...	1
$g(x)$	$-a^2$	-	0	+	b^2

[2] $a = b$ の場合

$g(x) = 2a^2x - a^2$ であり、 $a^2 > 0$ より、 $x > \frac{1}{2}$ で $g(x) > 0$ となり、 $x < \frac{1}{2}$ で $g(x) < 0$ となる。

$\frac{a}{a+b} = \frac{1}{2}$ であるから、 $g(x)$ の $0 \leq x \leq 1$ における符号は[1]の場合と同様になる。

以上、[1]、[2]より、 $f(x)$ の増減表は下図のようになる。

x	0	...	$\frac{a}{a+b}$	...	1
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$					

よって、 $f(x)$ は $x = \frac{a}{a+b}$ で最小値 $f\left(\frac{a}{a+b}\right) = \frac{a^2}{\frac{a}{a+b}} + \frac{b^2}{1-\frac{a}{a+b}} = a(a+b) + b(a+b) = (a+b)^2$ をとる。

(1)

$x = 8m + n$, $y = 5m + 2n$ の最大公約数が d であるから, k, l を互いに素である自然数として,

$$\begin{cases} x = 8m + n = kd \\ y = 5m + 2n = ld \end{cases}$$

とおける。この2式から n を消去して,

$$11m = (2k - l)d \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。また m を消去すると,

$$11n = (8l - 5k)d \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。 $11m \neq 0$, $11n \neq 0$ であるから, ①, ②より, d は $11m$, $11n$ の公約数であることが分かる。

m, n は互いに素であるから, $d = 1$ または $d = 11$ である。

(証明終)

(2)

$m = 2$ より,

$$\begin{cases} x = 16 + n & \dots \textcircled{3} \\ y = 10 + 2n & \dots \textcircled{4} \end{cases}$$

とおける。 $d = 11$ であるとき x は 11 の倍数であるから, ③より

$$n = 6 + 11(k - 1) \quad (k \text{ は自然数})$$

とかける。 $k = 1$ とすると,

$$n = 6 + 11(1 - 1) = 6, x = 16 + 6 = 22, y = 10 + 2 \cdot 6 = 22$$

となるが, このとき $d = 22$ であるから不適である。 $k = 2$ とすると,

$$n = 6 + 11(2 - 1) = 17, x = 16 + 17 = 33, y = 10 + 2 \cdot 17 = 44$$

となり, $d = 11$ であるから条件を満たす。よって求める最小の n は, $n = 17$ である。

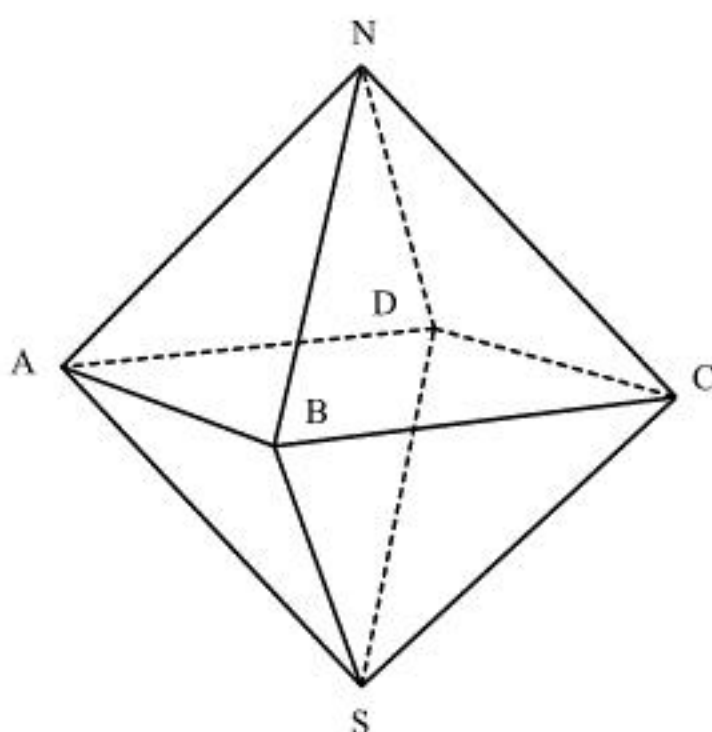
(答) $n = 17$

〔解答〕

(1)	$\frac{1}{3}$	(2)	$\frac{2}{9}$	(3)	$\frac{20}{81}$
-----	---------------	-----	---------------	-----	-----------------

〔解説〕

(1)



1回目の移動で点Pが4頂点A, B, C, Dのいずれに移動した場合も、2回目で移動する可能性のある頂点は、4頂点A, B, C, Dのうちの2点と頂点Sの3点である。よって、2回目の移動で頂点Sに移動する確率は $\frac{1}{3}$ である。

(2)

点Pが3回目の移動の後で頂点Nにあるのは、1回目の移動で4頂点A, B, C, Dのいずれかに移動し、2回目の移動で頂点N, S以外の隣接する2頂点に移動し、3回目の移動で頂点Nに移動する場合である。よって、求める確率は

$$1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$$

である。

(3)

点Pが5回目の移動の後で頂点Nにあるような移動の仕方には、以下の3つの場合が考えられる。

[1] 点Pが頂点Nを経由しない場合

1回目の移動で4頂点A, B, C, Dのいずれかに移動し、2～5回目の移動で正方形ABCDの各頂点を時計回りまたは反時計回りに移動する経路に限られる。よって、この場合の確率は、

$$1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot 2 = \frac{2}{81}$$

である。

[2] 点Pが3回目の移動で頂点Nに移動する場合

3回目までの移動では(2)と同じ動き方をする。4回目の移動では4頂点A, B, C, Dのいずれかに必ず移動するので、5回目の移動で頂点N, S以外の隣接する2頂点に移動すればよく、この場合の確率は、

$$\frac{2}{9} \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{27}$$

である。

[3] 点Pが4回目の移動で頂点Nに移動する場合

2回目までの移動では(2)と同じ動き方をし、3回目の移動では4頂点A, B, C, Dのうち移動可能な1つの頂点に移動し、4回目の移動で頂点Nに移動する。5回目移動では4頂点A, B, C, Dのいずれかに必ず移動するので、この場合の確率は、

$$1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{2}{27}$$

である。

以上, [1], [2], [3]より、求める確率は

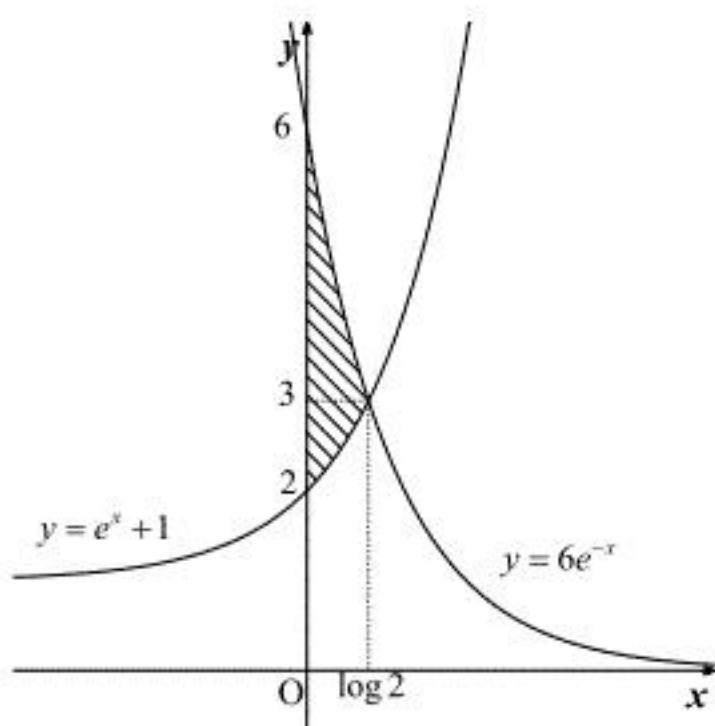
$$\frac{2}{81} + \frac{4}{27} + \frac{2}{27} = \frac{20}{81}$$

である。

$e^x = t$ とすると, $t > 0$ となる。 $y = e^x + 1$, $y = 6e^{-x}$ から y を消去して 2 曲線の交点の x 座標を求めると,

$$\begin{aligned} e^x + 1 &= 6e^{-x} \\ \Leftrightarrow t + 1 &= \frac{6}{t} \\ \Leftrightarrow t^2 + t &= 6 \\ \Leftrightarrow (t+3)(t-2) &= 0 \\ \Leftrightarrow t &= 2 \quad (\because t > 0) \\ \Leftrightarrow x &= \log 2 \end{aligned}$$

となる。よって, y 軸のまわりに回転させる図形は下図の斜線部である。



ここで,

$$\begin{aligned} y = e^x + 1 &\Leftrightarrow x = \log(y-1) \\ y = 6e^{-x} &\Leftrightarrow x = \log 6 - \log y \end{aligned}$$

であるから, 求める体積は,

$$\begin{aligned} \pi \int_2^6 x^2 dy &= \pi \int_2^3 \{\log(y-1)\}^2 dy + \pi \int_3^6 (\log 6 - \log y)^2 dy \\ &= \pi \int_2^3 \{\log(y-1)\}^2 dy + \pi \int_3^6 \{(\log 6)^2 - 2 \log 6 \cdot \log y + (\log y)^2\} dy \end{aligned}$$

となる。ここで C を積分定数として,

$$\int \log y dy = y \log y - \int y \cdot \frac{1}{y} dy = y \log y - y + C$$

$$\begin{aligned} \int (\log y)^2 dy &= y(\log y)^2 - \int y \cdot \frac{2}{y} \log y dy \\ &= y(\log y)^2 - 2(y \log y - y) + C \\ &= y(\log y)^2 - 2y \log y + 2y + C \end{aligned}$$

であるから, 求める体積は,

$$\begin{aligned} &\pi \int_2^3 \{\log(y-1)\}^2 dy + \pi \int_3^6 \{(\log 6)^2 - 2 \log 6 \cdot \log y + (\log y)^2\} dy \\ &= \pi \left[(y-1) \{\log(y-1)\}^2 - 2(y-1) \log(y-1) + 2(y-1) \right]_2^3 \\ &\quad + \pi \left[(\log 6)^2 y - 2 \log 6 \cdot (y \log y - y) + y(\log y)^2 - 2y \log y + 2y \right]_3^6 \\ &= \pi \left[\{2(\log 2)^2 - 4 \log 2 + 4\} - (0 - 0 + 2) \right] \\ &\quad + \pi \left[\{6(\log 6)^2 - 12(\log 6)^2 + 12 \log 6 + 6(\log 6)^2 - 12 \log 6 + 12\} \right. \\ &\quad \left. - \{3(\log 6)^2 - 6 \log 3 \cdot \log 6 + 6 \log 6 + 3(\log 3)^2 - 6 \log 3 + 6\} \right] \\ &= \pi \{-3(\log 6)^2 - 3(\log 3)^2 + 2(\log 2)^2 + 6 \log 3 \cdot \log 6 - 6 \log 6 + 6 \log 3 - 4 \log 2 + 8\} \\ &= \pi \{-(\log 2)^2 - 10 \log 2 + 8\} \quad (\because \log 6 = \log 2 + \log 3) \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \pi \{-(\log 2)^2 - 10 \log 2 + 8\}$$