

(1)

1, 1, 2, 2, 3, 3 という 6 つの数字を一行に並べるとき、相異なる並べ方は

$$\frac{6!}{2!2!2!} = 90 \text{ (通り)}$$

である。

(答) 90 通り

(2)

1, 1, 2, 2, 3, 3 という 6 つの数字を一行に並べるとき、同じ数字が隣り合わない並べ方について考える。左から並べて最初に出てくる数字を○、次に出てくる数字を△、最後に出てくる数字を□とすると、条件を満たす並べ方は次の 5 通りである。

○, △, ○, □, △, □

○, △, □, ○, △, □

○, △, □, ○, □, △

○, △, □, △, ○, □

○, △, □, △, □, ○

ここで、それぞれの並べ方について、1, 2, 3 の数字の入り方は $3! (= 6)$ 通りであるから、求める場合の数は

$$5 \cdot 6 = 30 \text{ (通り)}$$

であることがわかる。

(答) 30 通り

3次の整式 $f(x)$ は、実数 a, b, c, d ($a \neq 0$)を用いて

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

とおくことができる。このとき、与えられた条件は

$$\int_{x-1}^x f(t) dt = x^3$$

$$\Leftrightarrow \int_{x-1}^x (at^3 + bt^2 + ct + d) dt = x^3$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{a}{4}t^4 + \frac{b}{3}t^3 + \frac{c}{2}t^2 + dt \right]_{x-1}^x = x^3$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{4}x^4 + \frac{b}{3}x^3 + \frac{c}{2}x^2 + dx - \left\{ \frac{a}{4}(x-1)^4 + \frac{b}{3}(x-1)^3 + \frac{c}{2}(x-1)^2 + d(x-1) \right\} = x^3$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{4}(4x^3 - 6x^2 + 4x - 1) + \frac{b}{3}(3x^2 - 3x + 1) + \frac{c}{2}(2x - 1) + d = x^3$$

$$\Leftrightarrow ax^3 + \left(-\frac{3}{2}a + b\right)x^2 + (a - b + c)x - \frac{a}{4} + \frac{b}{3} - \frac{c}{2} + d = x^3$$

と変形できる。これは x についての恒等式であるから、両辺の係数を比較することで、実数 a, b, c, d は

$$\begin{cases} a = 1 \\ -\frac{3}{2}a + b = 0 \\ a - b + c = 0 \\ -\frac{a}{4} + \frac{b}{3} - \frac{c}{2} + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (a, b, c, d) = \left(1, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$$

と求まる。したがって、求める3次の整式 $f(x)$ は $f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$ となる。

$$(\text{答}) \quad f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$$

3つの条件

$$\angle A = 60^\circ, a:b=7:5, c=1$$

を満たす三角形 ABC について考える。まず、 $a:b=7:5$ より、正の実数 t を用いて

$$a=7t, b=5t$$

とおくことができる。ここで、余弦定理を用いることにより、正の実数 t は

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \angle A$$

$$\Leftrightarrow (7t)^2 = (5t)^2 + 1^2 - 2 \cdot 5t \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ$$

$$\Leftrightarrow 24t^2 + 5t - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (3t+1)(8t-1) = 0$$

$$\therefore t = \frac{1}{8} (> 0)$$

と求まる。よって、 $a = \frac{7}{8}, b = \frac{5}{8}$ となる。逆に、このとき

$$c (= 1) > a \left(= \frac{7}{8} \right) > b \left(= \frac{5}{8} \right), a + b \left(= \frac{3}{2} \right) > c (= 1)$$

を満たすから、三角形の成立条件を満たす。また、余弦定理を用いることにより、 $\cos C$ の値は

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

$$\Leftrightarrow 1^2 = \left(\frac{7}{8} \right)^2 + \left(\frac{5}{8} \right)^2 - 2 \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{5}{8} \cdot \cos C$$

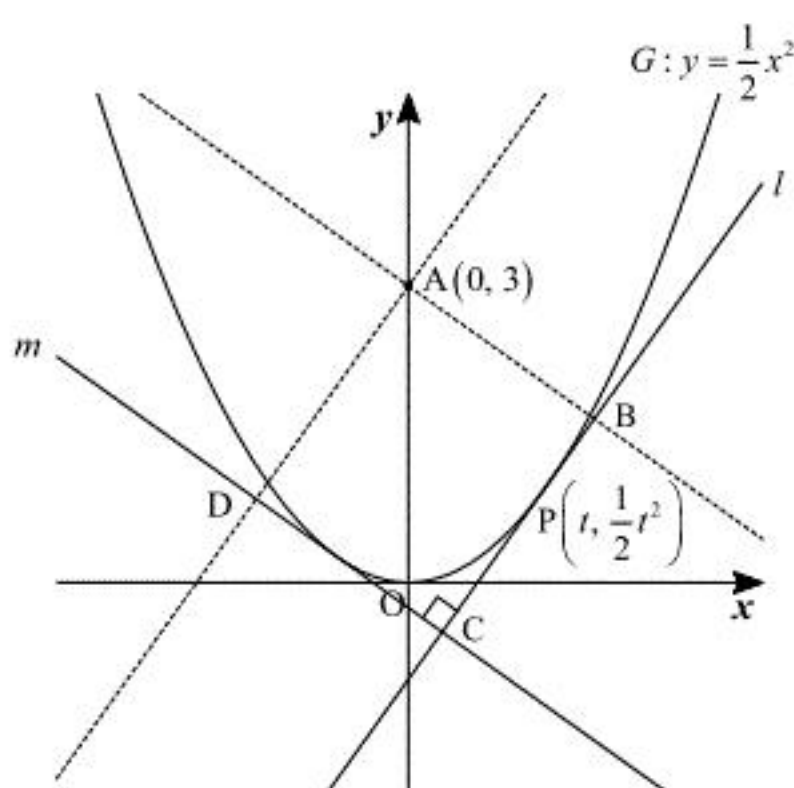
$$\Leftrightarrow \frac{70}{64} \cos C = \frac{10}{64}$$

$$\therefore \cos C = \frac{1}{7}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad a = \frac{7}{8}, \cos C = \frac{1}{7}$$

(1)



放物線 G および接線 l, m , 点 A, B, C, D の位置関係は上図のようになる。 G を表す式の導関

数は $y' = x$ であるから, G と m の接点を $Q\left(u, \frac{1}{2}u^2\right)$ とおくと, l, m の方程式は

$$l: y = t(x - t) + \frac{1}{2}t^2 \Leftrightarrow tx - y - \frac{1}{2}t^2 = 0$$

$$m: y = u(x - u) + \frac{1}{2}u^2 \Leftrightarrow ux - y - \frac{1}{2}u^2 = 0$$

となる。ここで, l, m は直交することから

$$tu = -1 \Leftrightarrow u = -\frac{1}{t}$$

であることがわかるため, m の方程式は

$$y = \left(-\frac{1}{t}\right)\left\{x - \left(-\frac{1}{t}\right)\right\} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{t}\right)^2 \Leftrightarrow x + ty + \frac{1}{2t} = 0$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad x + ty + \frac{1}{2t} = 0$$

(2)

直線 l と点 A の距離を d_1 , 直線 m と点 A の距離を d_2 とおくと, $S = d_1 \cdot d_2$ となる。ここで, 点と直線の距離公式より

$$d_1 = \frac{\left| -3 - \frac{1}{2}t^2 \right|}{\sqrt{t^2 + (-1)^2}}, \quad d_2 = \frac{\left| 3t + \frac{1}{2t} \right|}{\sqrt{1^2 + t^2}}$$

であるから, S を $t (> 0)$ を用いて表すと

$$\begin{aligned} S &= d_1 \cdot d_2 \\ &= \frac{\left| -3 - \frac{1}{2}t^2 \right|}{\sqrt{t^2 + (-1)^2}} \cdot \frac{\left| 3t + \frac{1}{2t} \right|}{\sqrt{1^2 + t^2}} \\ &= \frac{\left(\frac{t}{2} + \frac{3}{t} \right) \left(3t + \frac{1}{2t} \right)}{t + \frac{1}{t}} \quad (\because t > 0) \\ &= \frac{3}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right) + \frac{25}{4 \left(t + \frac{1}{t} \right)} \end{aligned}$$

となる。したがって, 相加平均, 相乗平均の関係により, S の最小値は

$$S \geq 2 \sqrt{\frac{3}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right) \cdot \frac{25}{4 \left(t + \frac{1}{t} \right)}} = \frac{5\sqrt{6}}{2}$$

となる。このときの等号成立条件は

$$\frac{3}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right) = \frac{25}{4 \left(t + \frac{1}{t} \right)} \Leftrightarrow \left(t + \frac{1}{t} \right)^2 = \frac{25}{6}$$

であり, $t > 0$ より $t + \frac{1}{t} > 0$ であるから

$$\begin{aligned} t + \frac{1}{t} &= \sqrt{\frac{25}{6}} \\ \Leftrightarrow 6t^2 - 5\sqrt{6}t + 6 &= 0 \\ \Leftrightarrow (2t - \sqrt{6})(3t - \sqrt{6}) &= 0 \\ \Leftrightarrow t &= \frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{3} \end{aligned}$$

となる。したがって, S は $t = \frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{3}$ のとき, 最小値 $\frac{5\sqrt{6}}{2}$ をとる。

$$(\text{答}) \quad \frac{5\sqrt{6}}{2}$$