

〔解答〕

(1)	$\frac{1}{3}$
(2)	$\frac{7}{81}$

〔解説〕

(1)

右に移動することを右、左に移動することを左、その場にとどまることを止と表すことにする。さいころを2回投げたのち、Pが原点にあるためには、

右, 左

左, 右

止, 止

のいずれかがこの順番に起こればよい。さいころの各目の出る確率は等しく $\frac{1}{6}$ であるから、

右, 左, 止が起こる確率は、それぞれ等しく $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ である。よって、求める確率は、

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

となる。

(2)

さいころを5回投げたのち、Pの座標が3以上であるためには、さいころの出る目の組が、

右, 右, 右, 右, 右

右, 右, 右, 右, 止

右, 右, 右, 右, 左

右, 右, 右, 止, 止

のいずれかになればよい。それぞれの確率はこの順番に、

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{3}\right)^5 \\ & {}_5C_1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 \\ & {}_5C_1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 \\ & {}_5C_2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \end{aligned}$$

であるから、求める確率は、

$$\left(\frac{1}{3}\right)^5 + {}_5C_1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 + {}_5C_1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 + {}_5C_2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{7}{81}$$

となる。

(1)

$$2x^2 + 3x - 2 = (2x - 1)(x + 2)$$

$$x^3 - x + 6 = (x + 2)(x^2 - 2x + 3)$$

とそれぞれ因数分解できるから、 $f(x)$ を $2x^2 + 3x - 2$ で割ったときの商を $Q_1(x)$ 、 $x^3 - x + 6$ で割ったときの商を $Q_2(x)$ とすると、

$$f(x) = (2x - 1)(x + 2)Q_1(x) + 6x + a \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$f(x) = (x + 2)(x^2 - 2x + 3)Q_2(x) + 5x^2 - ax - 8 \quad \cdots \textcircled{2}$$

と表せる。①、②に $x = -2$ を代入すると、

$$f(-2) = 6 \cdot (-2) + a = a - 12$$

$$f(-2) = 5 \cdot (-2)^2 - a \cdot (-2) - 8 = 2a + 12$$

が得られる。よって、

$$a - 12 = 2a + 12$$

$$\therefore a = -24$$

となる。

(答) $a = -24$

(2)

(1)の②より、

$$f(x) = (x + 2)(x^2 - 2x + 3)Q_2(x) + 5x^2 + 24x - 8$$

$$= (x^2 - 2x + 3)\{(x + 2)Q_2(x)\} + 5(x^2 - 2x + 3) + 34x - 23$$

$$= (x^2 - 2x + 3)\{(x + 2)Q_2(x) + 5\} + 34x - 23$$

であるから、 $f(x)$ を $x^2 - 2x + 3$ で割った余りは、 $34x - 23$ となる。

(答) $34x - 23$

〔解答〕

l の方程式	$y = \sqrt{3}x - 3$
----------	---------------------

〔解説〕

直線 l が放物線 $y = \frac{1}{4}x^2$ と点 $\left(t, \frac{1}{4}t^2\right) (t > 0)$ で接するとすると、 $y = \frac{1}{4}x^2$ について、 $y' = \frac{1}{2}x$ で

あるから、 l の方程式は、

$$y = \frac{1}{2}t(x-t) + \frac{1}{4}t^2$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}tx - \frac{1}{4}t^2 \quad (\Leftrightarrow 2tx - 4y - t^2 = 0)$$

とおける。これが円 $x^2 + (y+1)^2 = 1$ と接するとき、直線 l と円の中心 $(0, -1)$ との距離が 1 であ

るから、 t の値は、

$$\frac{|2t \cdot 0 - 4(-1) - t^2|}{\sqrt{(2t)^2 + (-4)^2}} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{|4 - t^2|}{\sqrt{4t^2 + 16}} = 1$$

$$\Leftrightarrow |4 - t^2| = \sqrt{4t^2 + 16}$$

$$\Leftrightarrow (4 - t^2)^2 = 4t^2 + 16$$

$$\Leftrightarrow t^4 - 12t^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow t^2(t + 2\sqrt{3})(t - 2\sqrt{3}) = 0$$

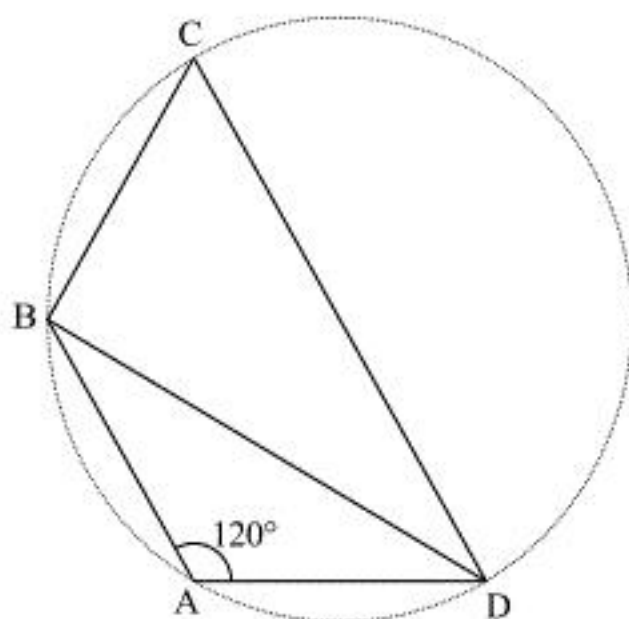
$$\therefore t = 2\sqrt{3} \quad (\because t > 0)$$

と求められる。よって、求める接線 l の方程式は、

$$y = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3}x - \frac{1}{4}(2\sqrt{3})^2$$

$$\therefore y = \sqrt{3}x - 3$$

である。



$\angle ADB = \angle BDC = \alpha$ とおくと、

$$\angle ABD = 180^\circ - \angle BAD - \angle ADB = 60^\circ - \alpha$$

である。また、円に内接する四角形の性質より、

$$\angle BCD = 180^\circ - \angle BAD = 60^\circ$$

であるから、

$$\angle CBD = 180^\circ - \angle BCD - \angle BDC = 120^\circ - \alpha$$

となる。ここで、外接円の半径を R とすると、正弦定理と加法定理より、

$$x = AB = 2R \sin \alpha$$

$$y = AD = 2R \sin(60^\circ - \alpha) = 2R \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha - \frac{1}{2} \sin \alpha \right)$$

$$z = CD = 2R \sin(120^\circ - \alpha) = 2R \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha + \frac{1}{2} \sin \alpha \right)$$

である。したがって、

$$\begin{aligned} x + y &= 2R \sin \alpha + 2R \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha - \frac{1}{2} \sin \alpha \right) \\ &= 2R \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha + \frac{1}{2} \sin \alpha \right) \\ &= z \end{aligned}$$

が示された。

(証明終)