

【解答】

(1)	$n = 395$
(2)	$\frac{4}{3}$

【解説】

(1)

6^{789} と 72^n を素因数分解すると

$$6^{789} = (2 \cdot 3)^{789} = 2^{789} \cdot 3^{789}$$

$$72^n = (2^3 \cdot 3^2)^n = 2^{3n} \cdot 3^{2n}$$

となる。よって、 6^{789} が 72^n の約数となるのは、2 と 3 の指数について

$$\begin{cases} 3n \geq 789 & \cdots \textcircled{1} \\ 2n \geq 789 & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

が成立するときであり、ここで

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow n \geq 263$$

$$\textcircled{2} \Leftrightarrow n \geq 394.5$$

となるから、求める自然数 n の最小値は $n = 395$ であることがわかる。

(2)

被積分関数を変形すると

$$(x+2)(|x|-1)^2 = x(|x|-1)^2 + 2(|x|-1)^2$$

となる。ここで、関数 $f(x)$, $g(x)$ を $f(x) = x(|x|-1)^2$, $g(x) = 2(|x|-1)^2$ とおくと

$$f(-x) = -x(|-x|-1)^2 = -x(|x|-1)^2 = -f(x)$$

$$g(-x) = 2(|-x|-1)^2 = 2(|x|-1)^2 = g(x)$$

となるから、 $f(x)$ は奇関数、 $g(x)$ は偶関数であることがわかる。したがって、求める定積分の値は

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (x+2)(|x|-1)^2 dx &= \int_{-1}^1 \{f(x) + g(x)\} dx \\ &= \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_{-1}^1 g(x) dx \\ &= 0 + 2 \int_0^1 g(x) dx \\ &= 2 \cdot 2 \int_0^1 (x-1)^2 dx \quad (\because 0 \leq x \leq 1 \text{ のとき } |x| = x) \\ &= 4 \int_0^1 (x^2 - 2x + 1) dx \\ &= 4 \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + x \right]_0^1 \\ &= 4 \left\{ \left(\frac{1}{3} - 1 + 1 \right) - (0 - 0 + 0) \right\} \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

と計算できる。

与えられた条件式は

$$\tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma = \tan \alpha \tan \beta \tan \gamma$$

$$\Leftrightarrow (\tan \alpha \tan \beta - 1) \tan \gamma = \tan \alpha + \tan \beta \quad \cdots \textcircled{1}$$

と変形できる。以下、 $\tan \gamma$ の係数の値で場合分けをして考える。

[1] $\tan \alpha \tan \beta \neq 1$ のとき

①の両辺を $\tan \alpha \tan \beta - 1 (\neq 0)$ で割り、三角関数の加法定理を用いて変形すると

$$\tan \gamma = -\frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\Leftrightarrow \tan \gamma = -\tan(\alpha + \beta)$$

$$\Leftrightarrow \tan \gamma = \tan\{-(\alpha + \beta)\}$$

となる。ここで、 $\tan x$ は周期 π の周期関数だから、 n を整数とすると

$$\gamma = -(\alpha + \beta) + n\pi \Leftrightarrow \alpha + \beta + \gamma = n\pi \quad \cdots \textcircled{2}$$

と表せる。さて、 $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} < \gamma < \frac{\pi}{2}$ を満たすとき

$$-\frac{3}{2}\pi < \alpha + \beta + \gamma < \frac{3}{2}\pi \quad \cdots \textcircled{3}$$

となるから、②、③より n の値の候補は $n = 0, \pm 1$ であることがわかる。一方で、以下の表のように、 n の値が $n = 0, \pm 1$ のとき、実際に問題文の条件を満たす α, β, γ の値がそれぞれ存在することがわかる。

n	(α, β, γ) の例	$-\frac{\pi}{2} < \alpha, \beta, \gamma < \frac{\pi}{2}$	$\tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma$	$\tan \alpha \tan \beta \tan \gamma$
0	$(0, 0, 0)$	満たす	0	0
1	$\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$	満たす	$3\sqrt{3}$	$3\sqrt{3}$
-1	$\left(-\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}\right)$	満たす	$-3\sqrt{3}$	$-3\sqrt{3}$

[2] $\tan \alpha \tan \beta = 1$ のとき

①より $\tan \alpha + \tan \beta = 0$ である。したがって、解と係数の関係より、2 次方程式 $x^2 + 1 = 0$ は $\tan \alpha, \tan \beta$ を解に持つ。ここで、この2 次方程式の解は $x = \pm i$ となるが、これを満たす実数 α, β は存在しない。

以上[1], [2]より、求める解は $\alpha + \beta + \gamma = 0, \pm \pi$ であることがわかる。

(答) $\alpha + \beta + \gamma = 0, \pm \pi$

〔解答〕

最小値	$S = \frac{\sqrt{2}}{2}$
t の値	$t = \frac{\sqrt{2}}{2}$

〔解説〕

放物線 $C: y = 1 - x^2$ の導関数は $y' = -2x$ であるから、点 $(t, 1 - t^2)$ における接線 l の方程式は

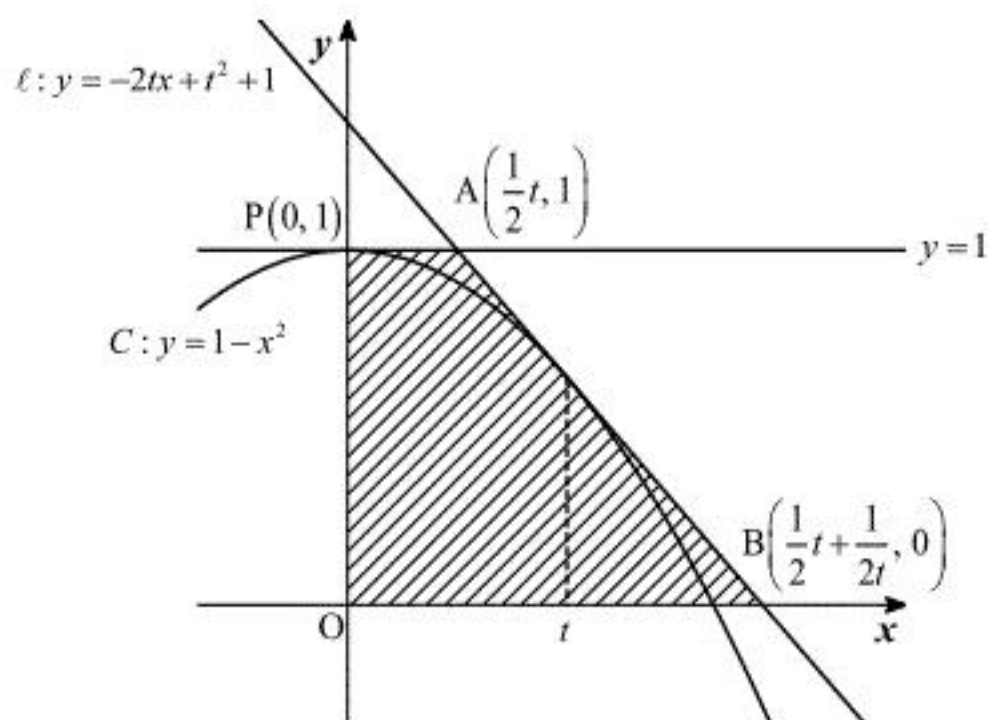
$$y - (1 - t^2) = -2t(x - t) \Leftrightarrow y = -2tx + t^2 + 1$$

と表せる。よって、接線 l と各直線の交点の x 座標は以下のように求まる。

$$\text{直線 } y = 0 \text{ との交点: } x = \frac{t^2 + 1}{2t} = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2t} \quad (\because t \neq 0)$$

$$\text{直線 } y = 1 \text{ との交点: } x = \frac{t^2}{2t} = \frac{1}{2}t \quad (\because t \neq 0)$$

したがって、各点の座標は $A\left(\frac{1}{2}t, 1\right)$, $B\left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{2t}, 0\right)$ であり、 S は以下の図の斜線部の面積である。



上図より、台形 $APOB$ の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot (PA + OB) \cdot OP \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left\{ \frac{1}{2}t + \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{2t} \right) \right\} \cdot 1 \\ &= \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{2t} \right) \end{aligned}$$

と表せる。ここで、 $t > 0$, $\frac{1}{2t} > 0$ であるから、相加平均と相乗平均の大小関係より

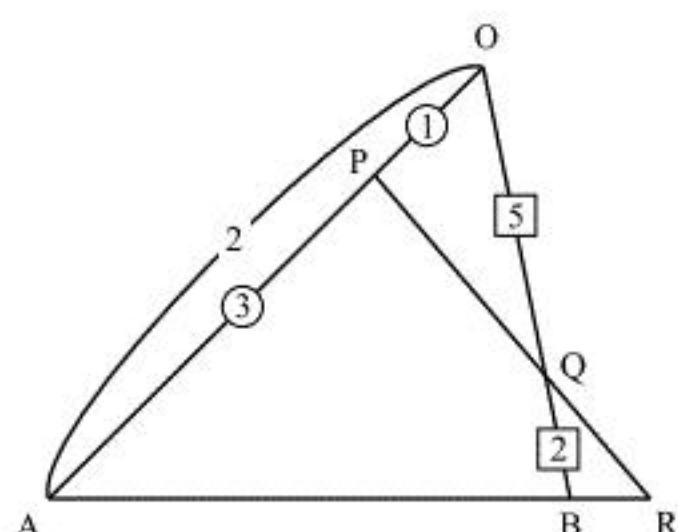
$$\begin{aligned} t + \frac{1}{2t} &\geq 2\sqrt{t \cdot \frac{1}{2t}} (= \sqrt{2}) \\ \therefore S &\geq \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

となり、等号が成立するのは、 $t = \frac{1}{2t}$ かつ $0 < t \leq 1$ より、 $t = \frac{\sqrt{2}}{2}$ のときである。よって、 S は

$t = \frac{\sqrt{2}}{2}$ のときに最小値 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ をとることがわかる。

(1)

△OABおよび3点P, Q, Rは以下のように図示できる。



点Rは直線AB上にあるから、実数 s を用いて

$$\overrightarrow{OR} = s\overrightarrow{OA} + (1-s)\overrightarrow{OB} = s\vec{a} + (1-s)\vec{b} \quad \dots \textcircled{1}$$

と表せる。また、点Rは直線PQ上にあるから、実数 t を用いて

$$\overrightarrow{OR} = t\overrightarrow{OP} + (1-t)\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{4}t\vec{a} + \frac{5}{7}(1-t)\vec{b} \left(\because \overrightarrow{OP} = \frac{1}{4}\vec{a}, \overrightarrow{OQ} = \frac{5}{7}\vec{b} \right) \quad \dots \textcircled{2}$$

と表せる。ここで、 $\vec{a}, \vec{b}$ は平行ではなく $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$ であるから、①, ②について係数比較することができ、 s, t についての条件

$$\begin{cases} s = \frac{1}{4}t \\ 1-s = \frac{5}{7}(1-t) \end{cases}$$

を得る。この連立方程式を解くと $s = -\frac{2}{13}, t = -\frac{8}{13}$ となるから、 $\overrightarrow{OR} = -\frac{2}{13}\vec{a} + \frac{15}{13}\vec{b}$ である。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OR} = -\frac{2}{13}\vec{a} + \frac{15}{13}\vec{b}$$

(2)

②より、 $\overrightarrow{OR}$ は $\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}$ を用いて

$$\overrightarrow{OR} = -\frac{8}{13}\overrightarrow{OP} + \frac{21}{13}\overrightarrow{OQ} = \frac{-8\overrightarrow{OP} + 21\overrightarrow{OQ}}{21-8}$$

と表せる。よって、点Rは線分PQを21:8に外分するから、求める比PQ:QRは

$$PQ:QR = (21-8):8 = 13:8$$

であることがわかる。

$$(\text{答}) \quad PQ:QR = 13:8$$

(3)

最初に△OABの面積 S を求めて、面積比により△OPQと△QBRの面積を求める。条件より

$$\begin{aligned} \begin{cases} |\vec{a} + \vec{b}| = 3 \\ |2\vec{b} - \vec{a}| = 2\sqrt{3} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} |\vec{a} + \vec{b}|^2 = 9 \\ |2\vec{b} - \vec{a}|^2 = 12 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 9 \\ 4|\vec{b}|^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{a}|^2 = 12 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} |\vec{b}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 5 \\ 4|\vec{b}|^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} = 8 \end{cases} \quad (\because |\vec{a}| = 2) \\ &\Leftrightarrow |\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = \sqrt{3}, \vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \end{aligned}$$

となるから、面積 S の値は

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2} = \frac{1}{2} \sqrt{4 \cdot 3 - 1^2} = \frac{\sqrt{11}}{2}$$

と求まる。また、面積比は、それぞれ

$$\begin{aligned} \triangle OAB : \triangle OPQ &= \left(\frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB \cdot \sin \angle AOB \right) : \left(\frac{1}{2} \cdot OP \cdot OQ \cdot \sin \angle AOB \right) \\ &= (OA \cdot OB) : \left(\frac{1}{4} OA \cdot \frac{5}{7} OB \right) \\ &= 1 : \frac{5}{28} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \triangle OPQ : \triangle QBR &= \left(\frac{1}{2} \cdot QO \cdot QP \cdot \sin \angle OQP \right) : \left(\frac{1}{2} \cdot QB \cdot QR \cdot \sin \angle BQR \right) \\ &= (QO \cdot QP) : \left(\frac{2}{5} QO \cdot \frac{8}{13} QP \right) \quad (\because (2)) \\ &= 1 : \frac{16}{65} \end{aligned}$$

となるから、△OPQと△QBRの面積は、それぞれ

$$\begin{aligned} \triangle OPQ &= \frac{5}{28} S = \frac{5\sqrt{11}}{56} \left(\because S = \frac{\sqrt{11}}{2} \right) \\ \triangle QBR &= \frac{16}{65} \cdot \frac{5}{28} S = \frac{2\sqrt{11}}{91} \left(\because S = \frac{\sqrt{11}}{2} \right) \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \text{三角形OPQの面積} : \frac{5\sqrt{11}}{56}, \text{三角形QBRの面積} : \frac{2\sqrt{11}}{91}$$