

〔解答〕

$$\frac{29}{384}$$

〔解説〕

出たさいころの目で場合分けをする。

[1] 出た目が3以下の場合

3枚以下のコインを投げて得点が4となる確率は0である。

[2] 出た目が4の場合

コインを4枚投げ、そのうち4枚が表であるから、得点が4である確率は、

$$\frac{1}{6} \cdot {}_4C_4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{96}$$

である。

[3] さいころの目が5の場合

コインを5枚投げ、そのうち4枚が表であるから、得点が4である確率は、

$$\frac{1}{6} \cdot {}_5C_4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{192}$$

である。

[4] さいころの目が6の場合

コインを6枚投げ、そのうち4枚が表であるから、得点が4である確率は、

$$\frac{1}{6} \cdot {}_6C_4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{128}$$

である。

以上[1]～[4]より、得点が4である確率は、

$$\frac{1}{96} + \frac{5}{192} + \frac{5}{128} = \frac{29}{384}$$

である。

(1)

$$\sin x + \sin y = \frac{4}{5} \Leftrightarrow \sin y = \frac{4}{5} - \sin x$$

であるから,

$$\cos 2x + \cos 2y = \frac{6}{5}$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x + 1 - 2\sin^2 y = \frac{6}{5}$$

$$\Leftrightarrow 2 - 2\sin^2 x - 2\left(\frac{4}{5} - \sin x\right)^2 = \frac{6}{5}$$

$$\Leftrightarrow 25\sin^2 x - 20\sin x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (5\sin x - 1)(5\sin x - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{5}, \frac{3}{5}$$

となる。したがって、 $(\sin x, \sin y)$ の値の組は、 $\sin x + \sin y = \frac{4}{5}$ より,

$$(\sin x, \sin y) = \left(\frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right), \left(\frac{3}{5}, \frac{1}{5}\right)$$

となる。いま、 $0 \leq x \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ より $0 \leq \sin x \leq \sin y \leq 1$ であるから,

$$(\sin x, \sin y) = \left(\frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right)$$

である。

$$(\text{答}) \sin x = \frac{1}{5}$$

(2)

$0 \leq x \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ より $\cos x \geq 0, \cos y \geq 0$ であるから,

$$\cos x = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

$$\cos y = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$$

となる。したがって、加法定理を用いることで

$$\sin(y-x) = \sin y \cos x - \cos y \sin x = \frac{3}{5} \cdot \frac{2\sqrt{6}}{5} - \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{6\sqrt{6}-4}{25}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \sin(y-x) = \frac{6\sqrt{6}-4}{25}$$

〔解答〕

(1)	$y = -2x - 2, y = 10x - 50$
(2)	$2x^2 + 2x$

〔解説〕

(1)

$y = \frac{1}{2}x^2$ の $x = p$ における接線の方程式は、 $y' = x$ より、

$$y = p(x - p) + \frac{1}{2}p^2$$

$$\Leftrightarrow y = px - \frac{1}{2}p^2$$

である。同様にして、 $y = x^2 - 4x - 1$ の $x = q$ における接線の方程式は、 $y' = 2x - 4$ より、

$$y = (2q - 4)(x - q) + q^2 - 4q - 1$$

$$\Leftrightarrow y = (2q - 4)x - q^2 - 1$$

である。これら2つの直線が一致するとき両方の放物線に接するから係数を比較して、

$$\begin{cases} p = 2q - 4 \\ -\frac{1}{2}p^2 = -q^2 - 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (p, q) = (-2, 1), (10, 7)$$

である。したがって、求める直線の方程式は、

$$y = -2x - 2, y = 10x - 50$$

である。

(2)

多項式 $x^{1010} + x^{101} + x^{10} + x$ を $x^3 - x$ で割った余りの x の次数は2以下であるから、商を $Q(x)$ 、余りを $ax^2 + bx + c$ (a, b, c は実数) とおくと、

$$\begin{aligned} x^{1010} + x^{101} + x^{10} + x &= (x^3 - x)Q(x) + ax^2 + bx + c \\ &= x(x-1)(x+1)Q(x) + ax^2 + bx + c \end{aligned}$$

となる。両辺に $x = 0, 1, -1$ をそれぞれ代入すると、

$$\begin{cases} 0 = c \\ 4 = a + b + c \\ 0 = a - b + c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (a, b, c) = (2, 2, 0)$$

となるから、求める余りは $2x^2 + 2x$ である。

4

(1)

[1] $x \leq 0$ のとき $y = 2ax$ と $y = x^3$ から y を消去して

$$x^3 = 2ax$$

$$\Leftrightarrow x(x^2 - 2a) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0, \pm\sqrt{2a} \quad (\because a > 0)$$

となる。これらのうち $x \leq 0$ を満たすのは $x = 0, -\sqrt{2a}$ である。

[2] $x > 0$ のとき $y = x^2 + ax$ と $y = x^3$ から y を消去して

$$x^3 = x^2 + ax$$

$$\Leftrightarrow x(x^2 - x - a) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0, \frac{1 \pm \sqrt{1+4a}}{2}$$

$$\therefore x = \frac{1 + \sqrt{1+4a}}{2} \quad (\because a > 0)$$

となる。

以上[1], [2]より、求める交点の x 座標は

$$x = -\sqrt{2a}, 0, \frac{1 + \sqrt{1+4a}}{2}$$

である。

$$(\text{答}) \quad x = -\sqrt{2a}, 0, \frac{1 + \sqrt{1+4a}}{2}$$

(2)

$a > 0$ より、

$$\frac{1 + \sqrt{1+4a}}{2} > \frac{1 + \sqrt{1}}{2} = 1$$

であり、

$$-\sqrt{2a} < -1 \Leftrightarrow a > \frac{1}{2}$$

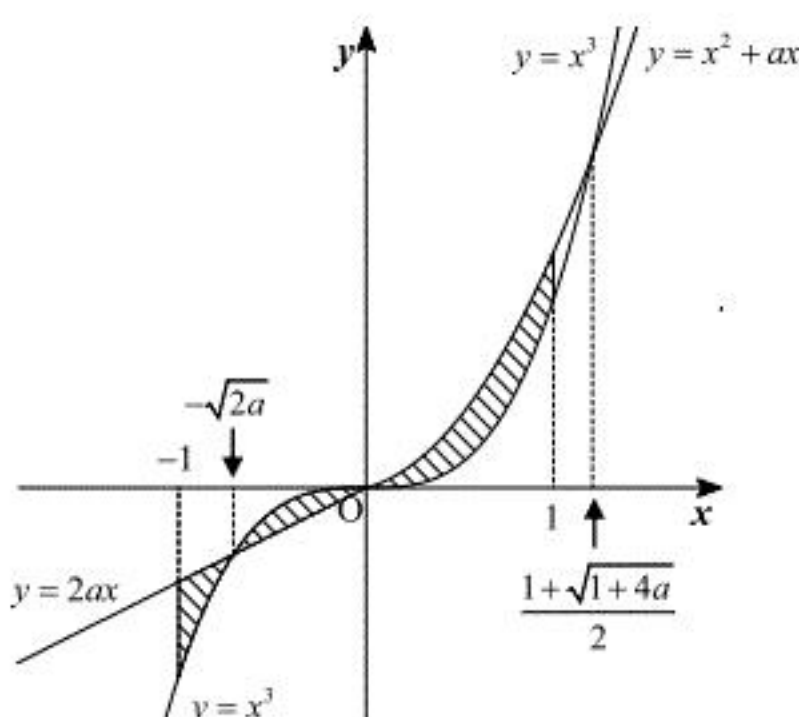
である。題意より、 S は曲線 $y = f(x)$ と $y = x^3$ のグラフで囲まれた部分のうち、 $-1 \leq x \leq 1$ を満たす領域の面積に等しい。ここで、 $x > 0$ のとき

$$f(x) = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4}$$

と表せることから、 $x > 0$ のとき $y = f(x)$ のグラフは軸が $x = -\frac{a}{2}$ である下に凸の放物線となる。以下、 a の値で場合分けする。

[1] $0 < a < \frac{1}{2}$ のとき

S は下図の斜線部の面積に等しくなる。



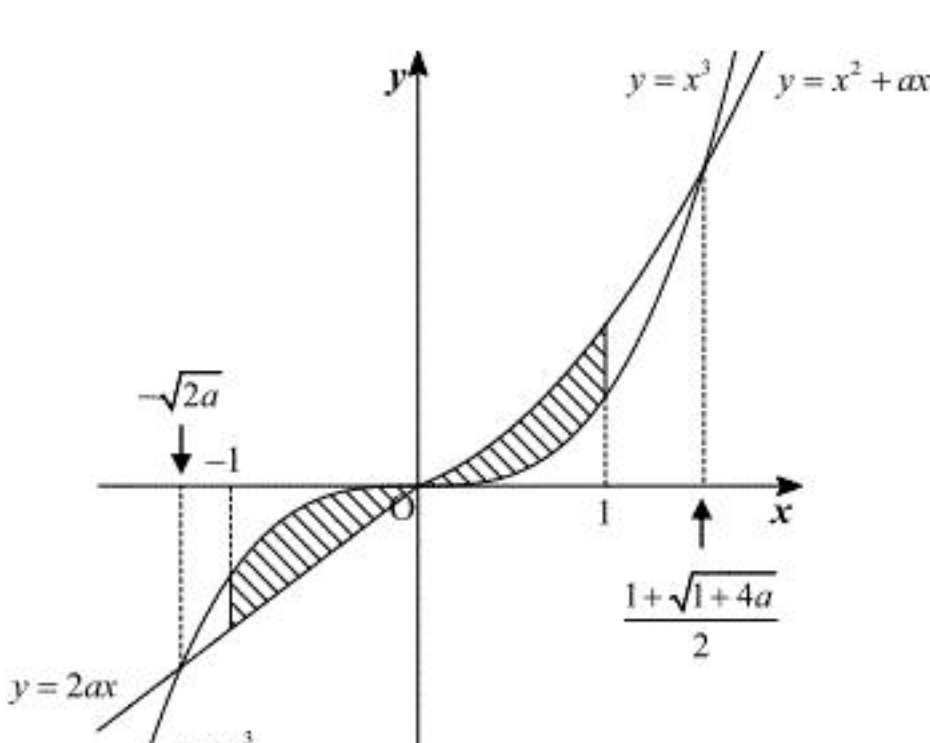
したがって、

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^{-\sqrt{2a}} (2ax - x^3) dx + \int_{-\sqrt{2a}}^0 (x^3 - 2ax) dx + \int_0^1 (x^2 + ax - x^3) dx \\ &= \int_{-\sqrt{2a}}^{-1} (x^3 - 2ax) dx + \int_{-\sqrt{2a}}^0 (x^3 - 2ax) dx + \int_0^1 (-x^3 + x^2 + ax) dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - ax^2 \right]_{-\sqrt{2a}}^{-1} + \left[\frac{1}{4}x^4 - ax^2 \right]_{-\sqrt{2a}}^0 + \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}ax^2 \right]_0^1 \\ &= \left(\frac{1}{4} - a \right) + 0 - 2 \left(\frac{1}{4} \cdot 4a^2 - a \cdot 2a \right) + \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}a \right) \\ &= 2a^2 - \frac{1}{2}a + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

である。

[2] $a \geq \frac{1}{2}$ のとき

S は下図の斜線部の面積に等しくなる。



したがって、

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^0 (x^3 - 2ax) dx + \int_0^1 (x^2 + ax - x^3) dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - ax^2 \right]_{-1}^0 + \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}ax^2 \right]_0^1 \\ &= 0 - \left(\frac{1}{4} - a \right) + \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}a \right) \\ &= \frac{3}{2}a - \frac{1}{6} \end{aligned}$$

である。

以上[1], [2]より、求める解は

$$S = \begin{cases} 2a^2 - \frac{1}{2}a + \frac{1}{3} & (0 < a < \frac{1}{2} \text{ のとき}) \\ \frac{3}{2}a - \frac{1}{6} & (a \geq \frac{1}{2} \text{ のとき}) \end{cases}$$

である。

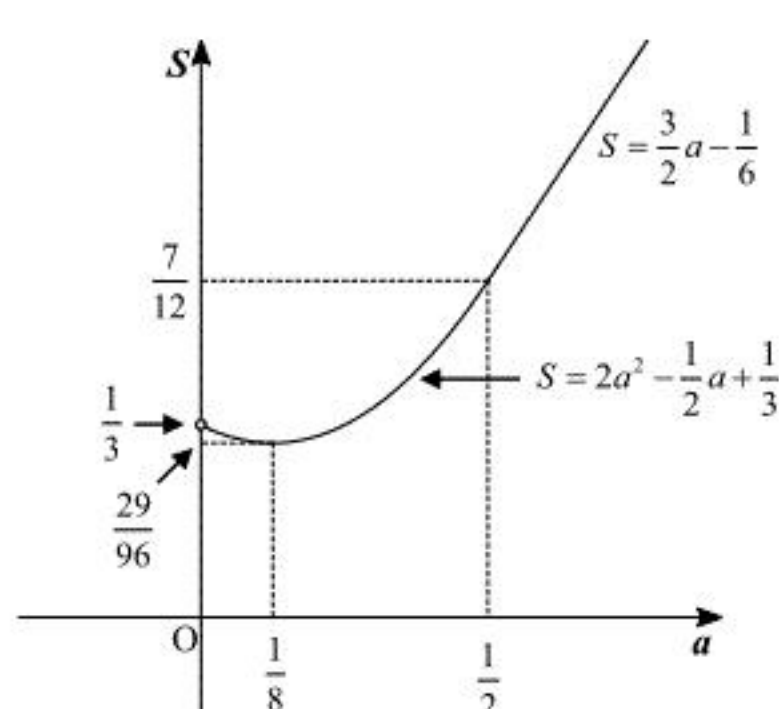
$$(\text{答}) \quad S = \begin{cases} 2a^2 - \frac{1}{2}a + \frac{1}{3} & (0 < a < \frac{1}{2} \text{ のとき}) \\ \frac{3}{2}a - \frac{1}{6} & (a \geq \frac{1}{2} \text{ のとき}) \end{cases}$$

(3)

(2)の結果より、

$$S = \begin{cases} 2\left(a - \frac{1}{8}\right)^2 + \frac{29}{96} & (0 < a < \frac{1}{2} \text{ のとき}) \\ \frac{3}{2}a - \frac{1}{6} & (a \geq \frac{1}{2} \text{ のとき}) \end{cases}$$

であり、下図のように図示できる。



したがって、 S は $a = \frac{1}{8}$ のとき最小値 $\frac{29}{96}$ をとる。

$$(\text{答}) \quad \text{最小値 } S = \frac{29}{96}, \quad a = \frac{1}{8}$$