

〔解答〕

(1)	$(-\sqrt{30}, 2\sqrt[3]{5}), (\sqrt{30}, 2\sqrt[3]{5})$	
(2)	(i)	$P_1 = \frac{5}{6}, P_2 = \frac{13}{18}$
	(ii)	$P_n = \frac{2}{3}P_{n-1} + \frac{1}{6}$
	(iii)	$P_n = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \left(\frac{2}{3} \right)^n \right\}$

〔解説〕

(1)

 $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 10}$ とおくと,

$$f'(x) = 2x \cdot \frac{1}{3}(x^2 + 10)^{-\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{x}{(x^2 + 10)^{\frac{2}{3}}}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1 \cdot (x^2 + 10)^{\frac{2}{3}} - x \cdot 2x \cdot \frac{2}{3}(x^2 + 10)^{-\frac{1}{3}}}{(x^2 + 10)^{\frac{4}{3}}} \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{(x^2 + 10) - \frac{4}{3}x^2}{(x^2 + 10)^{\frac{5}{3}}} \\ &= \frac{2}{9} \cdot \frac{-x^2 + 30}{(x^2 + 10)^{\frac{5}{3}}} \\ &= \frac{-2(x - \sqrt{30})(x + \sqrt{30})}{9(x^2 + 10)^{\frac{5}{3}}} \end{aligned}$$

となる。 $f''(x)$ の符号は $x = \pm\sqrt{30}$ の前後で変化するから、 $y = f(x)$ の変曲点は $x = \pm\sqrt{30}$ を満たす点であると言える。ここで、

$$f(\pm\sqrt{30}) = \sqrt[3]{\sqrt{30}^2 + 10} = 2\sqrt[3]{5}$$

であるから、変曲点の座標は

$$(\sqrt{30}, 2\sqrt[3]{5}), (-\sqrt{30}, 2\sqrt[3]{5})$$

である。

(2)(i)

さいころを1回投げるとき、出る目6通りは同様に確からしい。よってさいころを1回投げて6の目が出る確率は $\frac{1}{6}$ 、6以外の目が出る確率は $\frac{5}{6}$ である。さて、 P_1 はさいころを1回投げて6以外の目が出る確率であるから、

$$P_1 = \frac{5}{6}$$

となる。 P_2 はさいころを2回投げてともに6以外の目が出るか、またはともに6の目が出る確率であるから、

$$P_2 = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{13}{18}$$

となる。

(ii)

$n \geq 2$ の範囲で考える。さいころを n 回投げて6の目が偶数回出るのは、 $n-1$ 回目までに6の目が偶数回出て n 回目に6以外の目が出るとき、または $n-1$ 回目までに6の目が奇数回出て n 回目に6の目が出るときのみである。したがって、さいころを n 回投げて6の目が偶数回出る確率である P_n は

$$\begin{aligned} P_n &= P_{n-1} \cdot \frac{5}{6} + (1 - P_{n-1}) \cdot \frac{1}{6} \\ \Leftrightarrow P_n &= \frac{2}{3}P_{n-1} + \frac{1}{6} \end{aligned}$$

と表すことができる。

(iii)

(ii)より、 $n \geq 2$ について

$$\begin{aligned} P_n &= \frac{2}{3}P_{n-1} + \frac{1}{6} \\ \Leftrightarrow P_n - \frac{1}{2} &= \frac{2}{3} \left(P_{n-1} - \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

が成立するから、 $n \geq 2$ に対して

$$\begin{aligned} P_n - \frac{1}{2} &= \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1} \left(P_1 - \frac{1}{2} \right) \\ \Leftrightarrow P_n &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1} \\ \therefore P_n &= \frac{1}{2} \left\{ 1 + \left(\frac{2}{3} \right)^n \right\} \end{aligned}$$

となる。ここで $P_1 = \frac{5}{6}$ より、これは $n=1$ でも成立する。よって、 $n \geq 1$ に対して

$$P_n = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \left(\frac{2}{3} \right)^n \right\} \text{ となる。}$$

(1)

$$f(x) > g(x)$$

$$\Leftrightarrow \log \sqrt{x} > (\log x)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \log x > (\log x)^2$$

$$\Leftrightarrow \log x (2 \log x - 1) < 0$$

$$\Leftrightarrow 0 < \log x < \frac{1}{2}$$

$$\therefore 1 < x < \sqrt{e} \quad (\because e > 1)$$

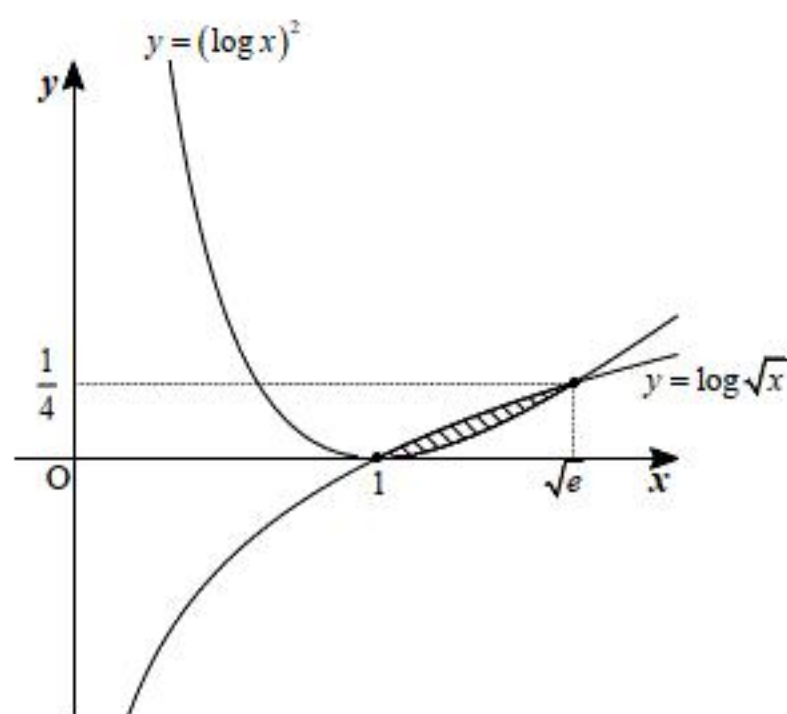
となる。

(答) $1 < x < \sqrt{e}$

(2)

$f(\sqrt{e}) = \frac{1}{4}$, $f(1) = 0$ より, 2 曲線の交点の座標は $(\sqrt{e}, \frac{1}{4})$, $(1, 0)$ である。したがって, 曲線

$y = f(x)$, $y = g(x)$ を図示すると下図を得る。



ここで, (1)より, 求める面積は前図の斜線部分の面積である。ここで, C_1, C_2 を積分定数として

$$\begin{aligned} \int \log x dx &= \int x' \cdot \log x dx \\ &= x \log x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= x \log x - \int 1 dx \\ &= x \log x - x + C_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int (\log x)^2 dx &= \int (x)' \cdot (\log x)^2 dx \\ &= x (\log x)^2 - \int x \cdot 2 \log x \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= x (\log x)^2 - 2 \int \log x dx \\ &= x (\log x)^2 - 2x \log x + 2x + C_2 \end{aligned}$$

が成立することより, 求める面積は

$$\begin{aligned} &\int_1^{\sqrt{e}} \{f(x) - g(x)\} dx \\ &= \int_1^{\sqrt{e}} \{\log \sqrt{x} - (\log x)^2\} dx \\ &= \int_1^{\sqrt{e}} \left\{ \frac{1}{2} \log x - (\log x)^2 \right\} dx \\ &= \left[\frac{1}{2} (x \log x - x) - \{x (\log x)^2 - 2x \log x + 2x\} \right]_1^{\sqrt{e}} \\ &= \frac{1}{2} [5x \log x - 5x - 2x (\log x)^2]_1^{\sqrt{e}} \\ &= \frac{1}{2} (5 - 3\sqrt{e}) \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{1}{2} (5 - 3\sqrt{e})$

〔解答〕

(1)	$1+2i$	
(2)	中心	$1+i$
	半径	1

〔解説〕

(1)

実数 a, b を用いて $z_{n+1} = iz_n + 2 \Leftrightarrow z_{n+1} - (a+bi) = i\{z_n - (a+bi)\}$ とすると,

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= iz_n + a + bi - ai + b \\ &= iz_n + (a+b) + (-a+b)i \end{aligned}$$

である。ここで、 $a+b=2, -a+b=0$ であるから、 $a=b=1$ である。したがって,

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= iz_n + 2 \\ \Leftrightarrow z_{n+1} - (1+i) &= i\{z_n - (1+i)\} \end{aligned}$$

となるから,

$$\begin{aligned} z_n &= i^{n-1}\{z_1 - (1+i)\} + 1+i \\ &= 1+i - i^n \end{aligned}$$

となる。よってこの式に $n=2019$ を代入して,

$$\begin{aligned} z_{2019} &= 1+i - i^{2019} \\ &= 1+i - (-i) \\ &= 1+2i \end{aligned}$$

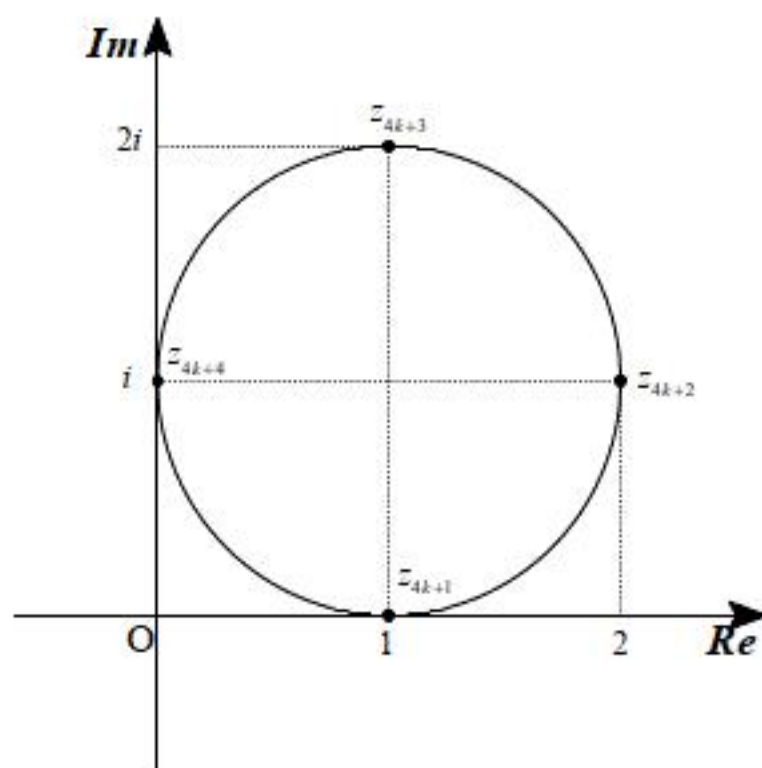
が得られる。

(2)

$k=0, 1, 2, \dots$ に対して,

$$\begin{aligned} z_{4k+1} &= 1+i - i^{4k+1} = 1 \\ z_{4k+2} &= 1+i - i^{4k+2} = 2+i \\ z_{4k+3} &= 1+i - i^{4k+3} = 1+2i \\ z_{4k+4} &= 1+i - i^{4k+4} = i \end{aligned}$$

となる。したがって、求める円は $1, 2+i, 1+2i, i$ の4点を通る円である。



4点とすべての点を通る円を複素数平面上に図示すると上図を得る。よって、そのような円は中心 $1+i$ 、半径1の円であると分かる。

4

(1)

$$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{14}$$

の両辺は共に正だから2乗しても同値性は保たれ、

$$|\vec{a}-\vec{b}|^2=(\sqrt{14})^2$$

$$\Leftrightarrow |\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=14$$

$$\Leftrightarrow 3^2-2\cdot 3\cdot 5\cdot \cos \angle AOB+5^2=14$$

$$\therefore \cos \angle AOB=\frac{2}{3}$$

が得られる。

$$(\text{答}) \cos \angle AOB=\frac{2}{3}$$

(2)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \frac{1}{5}\vec{a} + \frac{3}{10}\vec{b} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\vec{a} + \frac{3}{5}\vec{b}\right)\end{aligned}$$

より、点Pは線分ABを3:2に内分する点と点Oを結ぶ線分の中点であると言える。問題文より、線分ABを3:2に内分する点こそが点Qであるから、

$$AQ:QB=3:2$$

$$OP:PQ=1:1$$

となる。

$$(\text{答}) OP:PQ=1:1, AQ:QB=3:2$$

(3)

点A'は線分OA上の点Oを除いた部分に存在するから、 $\overrightarrow{OA'}=t\vec{a}$ と表すとき

$$0 < t \leq 1 \quad \dots\dots ①$$

が満たされる。同様に、 $\overrightarrow{OB'}=s\vec{b}$ とおくと

$$0 < s \leq 1 \quad \dots\dots ②$$

が満たされる。ここで、点Pは直線A'B'上の点であり、実数kを用いて

$$\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OA'}+(1-k)\overrightarrow{OB'}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OP}=kt\vec{a}+(1-k)s\vec{b}$$

と表せるから、 $\vec{a}, \vec{b}$ が互いに一次独立であることより $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{5}\vec{a}+\frac{3}{10}\vec{b}$ と係数を比較して

$$\begin{cases} kt=\frac{1}{5} \\ (1-k)s=\frac{3}{10} \end{cases}$$

が得られる。前者の式の両辺をs倍、後者の式の両辺をt倍して辺々足し合わせると

$$\begin{aligned}ts &= \frac{1}{5}s + \frac{3}{10}t \\ \Leftrightarrow 2(5t-1)s &= 3t\end{aligned}$$

となる。この式において $t=\frac{1}{5}$ と仮定すると $0=\frac{3}{5}$ となり矛盾するから、 $t\neq\frac{1}{5}$ であると分かり、

$$s=\frac{3t}{2(5t-1)} \quad \dots\dots ③$$

となる。さて、s, tが満たす条件は

$$①\text{かつ}②\text{かつ}③$$

$$\Leftrightarrow 0 < t \leq 1 \quad \text{かつ} \quad 0 < s \leq 1 \quad \text{かつ} \quad s=\frac{3t}{2(5t-1)}$$

であるから、ここからsを消去すると、tが満たす条件は

$$\begin{aligned}0 < t \leq 1 \quad \text{かつ} \quad 0 < \frac{3t}{2(5t-1)} \leq 1 \\ \Leftrightarrow 0 < t \leq 1 \quad \text{かつ} \quad \frac{3t}{2(5t-1)} > 0 \quad \text{かつ} \quad \frac{3t}{2(5t-1)} \leq 1 \\ \Leftrightarrow 0 < t \leq 1 \quad \text{かつ} \quad t > \frac{1}{5} \quad \text{かつ} \quad \frac{3t}{2(5t-1)} \leq 1 \\ \Leftrightarrow 0 < t \leq 1 \quad \text{かつ} \quad t > \frac{1}{5} \quad \text{かつ} \quad 3t \leq 2(5t-1) \\ \Leftrightarrow 0 < t \leq 1 \quad \text{かつ} \quad t > \frac{1}{5} \quad \text{かつ} \quad t \geq \frac{2}{7} \\ \therefore \frac{2}{7} \leq t \leq 1\end{aligned}$$

であると求められる。また、 $\triangle OA'B'$ の面積をSとおくと、

$$\begin{aligned}S &= (\triangle OAB \text{の面積}) \cdot \frac{|\overrightarrow{OA'}|}{|\overrightarrow{OA}|} \cdot \frac{|\overrightarrow{OB'}|}{|\overrightarrow{OB}|} \\ &= \frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sin \angle AOB \cdot t \cdot s \\ &= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5 \cdot \sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2} \cdot \frac{3t^2}{2(5t-1)} \quad (\because 0 < \angle AOB < \pi \text{より} \sin \angle AOB > 0) \\ &= \frac{15\sqrt{5}}{4} \cdot \frac{t^2}{5t-1} \\ &= \frac{3\sqrt{5}}{20} \left(5t-1 + \frac{1}{5t-1} + 2 \right)\end{aligned}$$

と求められ、 $5t-1 > 0$ であることに注意すれば、相加平均、相乗平均の関係より

$$S \geq \frac{3\sqrt{5}}{20} \left\{ 2\sqrt{(5t-1) \cdot \frac{1}{5t-1}} + 2 \right\} = \frac{3}{5}\sqrt{5}$$

が得られる。等号が成立するのは

$$\begin{aligned}5t-1 &= \frac{1}{5t-1} \\ \Leftrightarrow (5t-1)^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow 5t-1 &= 1 \quad (\because 5t-1 > 0) \\ \therefore t &= \frac{2}{5}\end{aligned}$$

のときであるが、これは $\frac{2}{7} \leq t \leq 1$ を満たす。したがってSの最小値は $\frac{3}{5}\sqrt{5}$ となる。

$$(\text{答}) t \text{の範囲: } \frac{2}{7} \leq t \leq 1, \text{面積の最小値: } \frac{3}{5}\sqrt{5}$$