

〔解答〕

(1)	$\frac{91}{216}$
(2)	$\frac{35}{432}$

〔解説〕

(1)

「条件 $M_1 = M_2 = M_3$ が成り立つ」ということは「 a_1, a_2, a_3 の最大値が a_1 である」ということである。すなわち、 $l = 1, 2, \dots, 6$ とすると「 $a_1 = l$ のとき、 a_2, a_3 が l 以下の目」であればよいということである。したがって、さいころの出る目が同様に確からしいことから求める確率は

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \frac{1}{6} \cdot 1^2 \\
 &= \frac{1}{6^3} \{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2\} \\
 &= \frac{1}{6^3} \cdot \frac{1}{6} \cdot 6 \cdot (6+1) \cdot (2 \cdot 6+1) \\
 &= \frac{91}{216}
 \end{aligned}$$

となる。

(2)

「条件 $M_1 = M_2 = M_3 < M_4$ が成り立つ」ということは「『 a_1, a_2, a_3 の最大値が a_1 』かつ『 $a_4 > a_1$ 』」ということである。すなわち、 $l = 1, 2, \dots, 5$ とすると、「『 $a_1 = l$ のとき、 a_2, a_3 が l 以下の目』かつ『 $a_1 = l$ のとき、 a_4 は $l+1$ 以上の目』」であればよいということである。したがって、さいころの出る目が同様に確からしいことから求める確率は、

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{5}{6} + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} \\
 &= \frac{1}{6^4} (1^2 \cdot 5 + 2^2 \cdot 4 + 3^2 \cdot 3 + 4^2 \cdot 2 + 5^2 \cdot 1) \\
 &= \frac{105}{6^4} \\
 &= \frac{35}{432}
 \end{aligned}$$

となる。

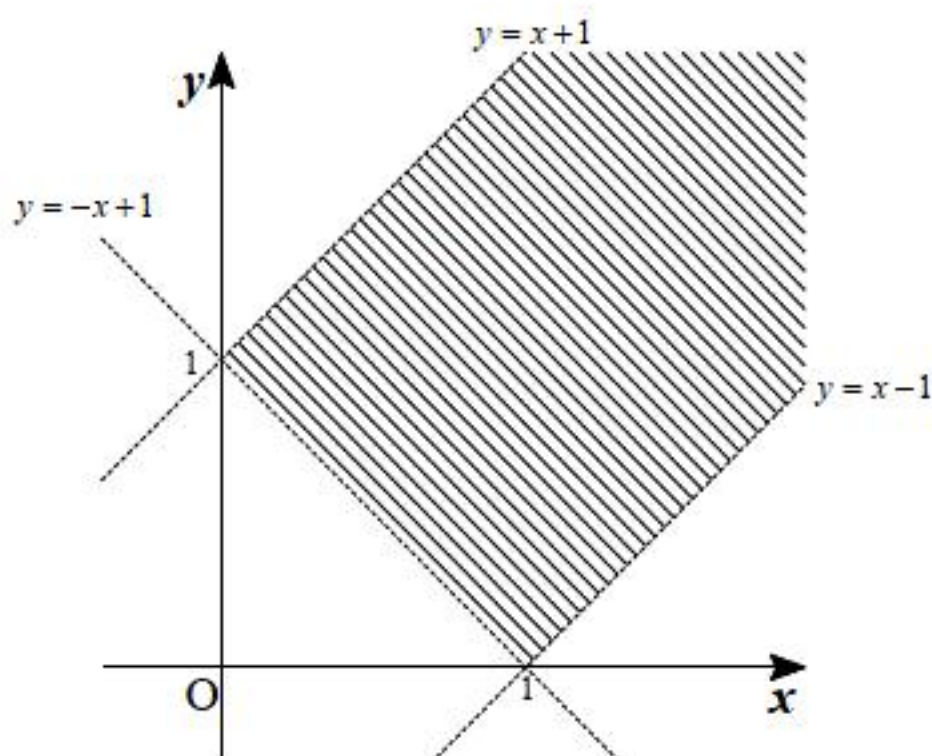
(1)

条件(a)を満たす必要十分条件は、任意の2辺の長さの和が残りの1辺の長さより大きいことであるから、

$$1+x>y \text{ かつ } 1+y>x \text{ かつ } x+y>1$$

$$\Leftrightarrow y<x+1 \text{ かつ } y>x-1 \text{ かつ } y>-x+1$$

となる。よって、これを図示すると以下の斜線部の領域となる。ただし境界線は除く。



(答) 前図

(2)

長さ1, x , y の辺の対角をそれぞれ $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ とおくと、余弦定理より

$$\cos \angle A = \frac{x^2 + y^2 - 1}{2xy}, \cos \angle B = \frac{y^2 + 1 - x^2}{2y}, \cos \angle C = \frac{x^2 + 1 - y^2}{2x}$$

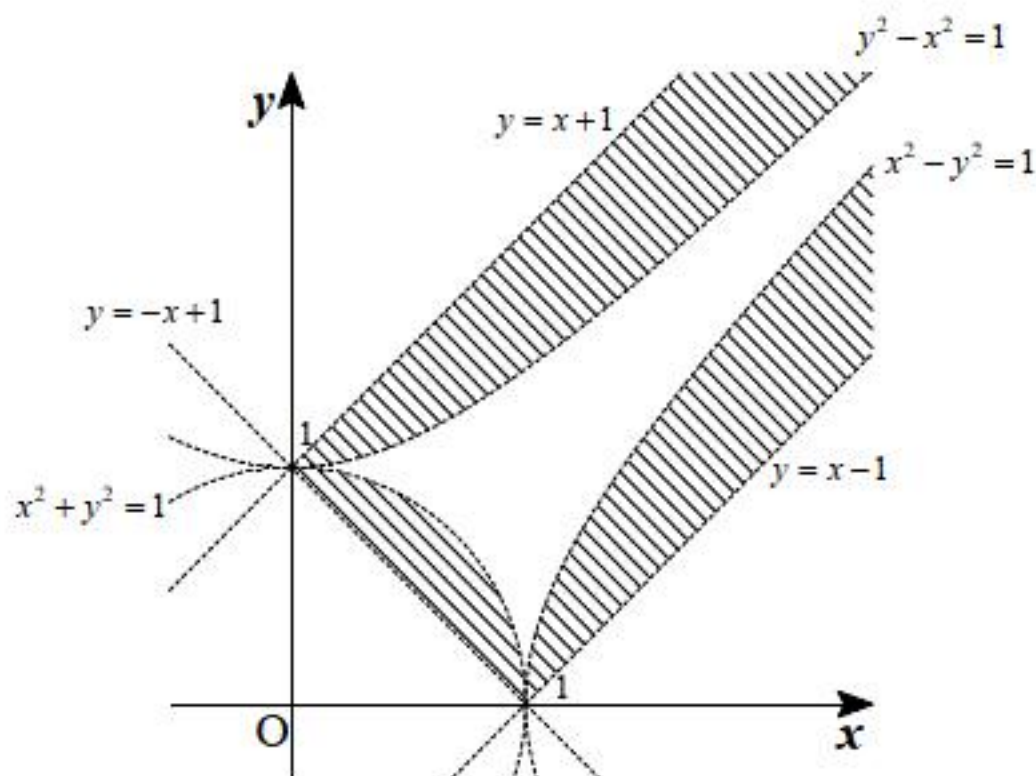
が成り立つ。条件(b)が成立するためには、条件(a)が成立しているもとで長さ1, x , y の辺をもつ三角形の3つの内角のうち一つが鈍角であることである。したがって、条件(b)を満たす必要十分条件は、 $x, y > 0$ より

$$\text{『条件(a)』 かつ 『} \cos \angle A < 0 \text{ または } \cos \angle B < 0 \text{ または } \cos \angle C < 0 \text{』}$$

$$\Leftrightarrow \text{『条件(a)』 かつ 『} x^2 + y^2 - 1 < 0 \text{ または } y^2 + 1 - x^2 < 0 \text{ または } x^2 + 1 - y^2 < 0 \text{』}$$

$$\Leftrightarrow \text{『条件(a)』 かつ 『} x^2 + y^2 < 1 \text{ または } x^2 - y^2 > 1 \text{ または } y^2 - x^2 > 1 \text{』}$$

となる。よって、これを図示すると以下の斜線部の領域となる。ただし境界線は除く。



(答) 前図

〔解答〕

(1)	α の実部	$-\frac{13}{2}$	α の虚部	$\frac{5\sqrt{3}}{6}$
	β の実部	$-\frac{13}{2}$	β の虚部	$-\frac{5\sqrt{3}}{6}$
(2)	$\frac{128}{3}\pi$			

〔解説〕

(1)

$$\omega = \cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi \text{ より,}$$

$$\begin{aligned}\omega^2 &= \left(\cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi \right)^2 \\ &= \cos \frac{4}{3}\pi + i \sin \frac{4}{3}\pi \\ &= \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}\end{aligned}$$

である。よって、 $\omega + \omega^2 = -1$, $\omega^2 - \omega = -\sqrt{3}i$ である。ここで、

$$\omega\alpha + \omega^2\beta = 4 \quad \cdots \text{①}$$

$$\omega^2\alpha + \omega\beta = 9 \quad \cdots \text{②}$$

とすると、①+②より、

$$(\omega^2 + \omega)\alpha + (\omega^2 + \omega)\beta = 13$$

$$\Leftrightarrow (-1)\alpha + (-1)\beta = 13$$

$$\Leftrightarrow \alpha + \beta = -13$$

となる。また、②-①より

$$(\omega^2 - \omega)\alpha + (\omega - \omega^2)\beta = 5$$

$$\Leftrightarrow (\omega^2 - \omega)(\alpha - \beta) = 5$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{3}i(\alpha - \beta) = 5$$

$$\Leftrightarrow \alpha - \beta = \frac{5\sqrt{3}}{3}i$$

となる。したがって、

$$\alpha = \frac{1}{2}\{(\alpha + \beta) + (\alpha - \beta)\} = -\frac{13}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{6}i$$

$$\beta = \frac{1}{2}\{(\alpha + \beta) - (\alpha - \beta)\} = -\frac{13}{2} - \frac{5\sqrt{3}}{6}i$$

とわかる。

(2)

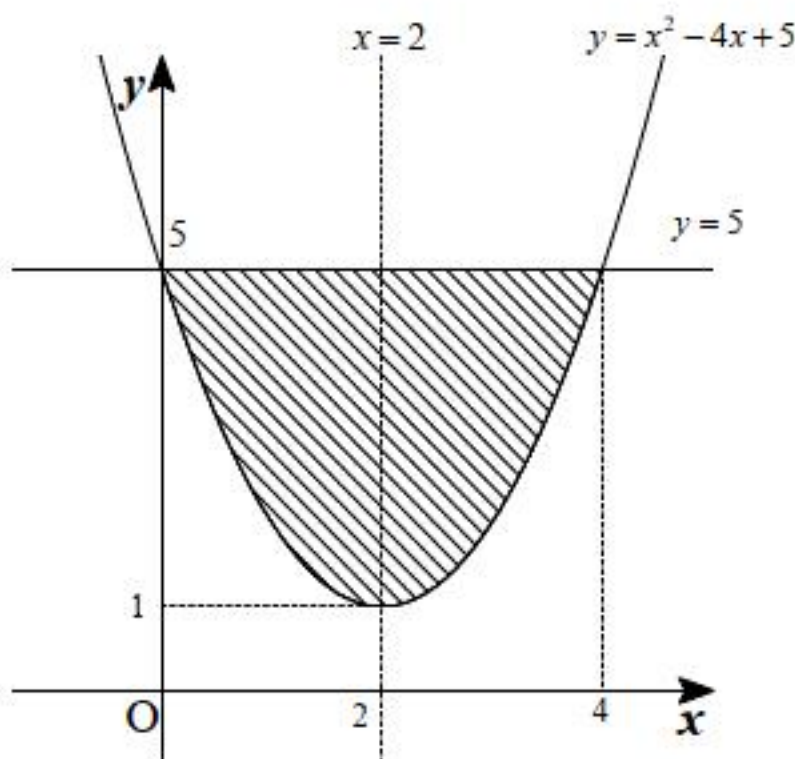
$y = x^2 - 4x + 5$, $y = 5$ の交点の x 座標は、2 式を連立して y を消去すると、

$$x^2 - 4x + 5 = 5$$

$$\Leftrightarrow x(x - 4) = 0$$

$$\therefore x = 0, 4$$

となるから、 $y = x^2 - 4x + 5$, $y = 5$ は $(0, 5)$, $(4, 5)$ で交わる。 $y \geq x^2 - 4x + 5$ かつ $y \leq 5$ を図示すると以下の斜線部のようにになる。ただし境界線を含む。



$y = x^2 - 4x + 5$ を $x = (y \text{ の式})$ の形で表すと、

$$y = x^2 - 4x + 5$$

$$\Leftrightarrow y = (x - 2)^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow x - 2 = \pm\sqrt{y - 1}$$

$$\therefore x = 2 \pm \sqrt{y - 1}$$

となる。 $x = 2 + \sqrt{y - 1}$ が $y = x^2 - 4x + 5$ の $x \geq 2$ の部分であり、 $x = 2 - \sqrt{y - 1}$ が $y = x^2 - 4x + 5$ の $x \leq 2$ の部分である。したがって求める立体の体積を V とすると、

$$\begin{aligned}V &= \pi \left\{ \int_1^5 (2 + \sqrt{y - 1})^2 - (2 - \sqrt{y - 1})^2 \right\} dy \\ &= 8\pi \int_1^5 \sqrt{y - 1} dy \\ &= 8\pi \cdot \left[\frac{2}{3} (y - 1)^{\frac{3}{2}} \right]_1^5 \\ &= \frac{128}{3}\pi\end{aligned}$$

とわかる。

(1)

$$f'(x) = \frac{x^2 + 1 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

であるから、 $y = f(x)$ 上の点 $(t, f(t))$ の接線は、

$$\begin{aligned} y &= f'(t)(x-t) + f(t) \\ \Leftrightarrow y &= \frac{1-t^2}{(t^2+1)^2}x + \frac{2t^3}{(t^2+1)^2} \end{aligned}$$

となり、これが $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ を通るから、接線の式にこれを代入して

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= \frac{1-t^2}{(t^2+1)^2} + \frac{2t^3}{(t^2+1)^2} \\ \Leftrightarrow (t^2+1)^2 &= 2(2t^3 - t^2 + 1) \\ \Leftrightarrow t^4 - 4t^3 + 4t^2 - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (t-1)^2(t^2 - 2t - 1) &= 0 \\ \therefore t &= 1, 1 \pm \sqrt{2} \end{aligned}$$

を得る。よって、 $t = 1, 1 \pm \sqrt{2}$ を $y = \frac{1-t^2}{(t^2+1)^2}x + \frac{2t^3}{(t^2+1)^2}$ に代入して得る方程式が求める接線と

なる。 $t = 1 \pm \sqrt{2}$ のとき、 $t^2 - 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow t^2 = 2t + 1$ であることを利用して、

$$\begin{aligned} y &= \frac{1-t^2}{(t^2+1)^2}x + \frac{2t^3}{(t^2+1)^2} \\ \Leftrightarrow y &= \frac{-2t}{(2t+2)^2}x + \frac{2t(2t+1)}{(2t+2)^2} \\ \Leftrightarrow y &= -\frac{t}{2(t^2+2t+1)}x + \frac{2t^2+t}{2(t^2+2t+1)} \\ \Leftrightarrow y &= -\frac{t}{4(2t+1)}x + \frac{5t+2}{4(2t+1)} \\ \Leftrightarrow y &= -\frac{1 \pm \sqrt{2}}{4(3 \pm 2\sqrt{2})}x + \frac{7 \pm 5\sqrt{2}}{4(3 \pm 2\sqrt{2})} \quad (\text{複号同順}) \\ \Leftrightarrow y &= -\frac{(1 \pm \sqrt{2})(3 \mp 2\sqrt{2})}{4}x + \frac{(7 \pm 5\sqrt{2})(3 \mp 2\sqrt{2})}{4} \quad (\text{複号同順}) \\ \therefore y &= \frac{1 \mp \sqrt{2}}{4}x + \frac{1 \pm \sqrt{2}}{4} \quad (\text{複号同順}) \end{aligned}$$

となる。 $t = 1$ を代入すると $y = \frac{1}{2}$ となるから求める接線の式は、

$$y = \frac{1 \mp \sqrt{2}}{4}x + \frac{1 \pm \sqrt{2}}{4}, y = \frac{1}{2} \quad (\text{複号同順})$$

となる。

$$(\text{答}) \quad y = \frac{1 \mp \sqrt{2}}{4}x + \frac{1 \pm \sqrt{2}}{4}, y = \frac{1}{2} \quad (\text{複号同順})$$

(2)

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^2 \left| \frac{x}{x^2+1} - ax \right| dx \\ &= \int_{-2}^2 |x| \left| \frac{1}{x^2+1} - a \right| dx \end{aligned}$$

となる。ここで、 $y = |x|$, $y = \left| \frac{1}{x^2+1} - a \right|$ はともに偶関数であるから、 $y = \left| \frac{x}{x^2+1} - ax \right|$ も偶関数で

ある。よって、

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^2 |x| \left| \frac{1}{x^2+1} - a \right| dx \\ &= 2 \int_0^2 x \left| \frac{1}{x^2+1} - a \right| dx \end{aligned}$$

となる。また、 $x \geq 0$ のとき、

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2+1} &= a \\ \Leftrightarrow \frac{1}{a} &= x^2+1 \quad (\because a > 0, x^2+1 > 0) \\ \Leftrightarrow x &= \sqrt{\frac{1}{a}-1} \quad (\because a \leq 1, \frac{1}{a} \geq 1) \end{aligned}$$

である。 $x \geq 0$ で $y = \frac{1}{x^2+1}$ は単調減少であり、 $\frac{1}{5} \leq a \leq 1$ のとき、 $0 \leq \sqrt{\frac{1}{a}-1} \leq 2$ であることを考えれば、

$$S = 2 \int_0^{\sqrt{\frac{1}{a}-1}} \left(\frac{x}{x^2+1} - ax \right) dx + 2 \int_{\sqrt{\frac{1}{a}-1}}^2 \left(ax - \frac{x}{x^2+1} \right) dx$$

である。したがって、

$$\begin{aligned} S &= 2 \left[\frac{1}{2} \log(x^2+1) - \frac{1}{2} ax^2 \right]_0^{\sqrt{\frac{1}{a}-1}} + 2 \left[\frac{1}{2} ax^2 - \frac{1}{2} \log(x^2+1) \right]_{\sqrt{\frac{1}{a}-1}}^2 \\ &= \log \frac{1}{a} - (1-a) + 4a - \log 5 + \log \frac{1}{a} - (1-a) \\ &= 6a - 2 \log a - 2 - \log 5 \end{aligned}$$

とわかる。ここで、

$$\frac{dS}{da} = 6 - \frac{2}{a}$$

であるから、 $\frac{1}{5} \leq a \leq 1$ での増減表は以下のようになる。

a	$\frac{1}{5}$	...	$\frac{1}{3}$	...	1
$\frac{dS}{da}$		-	0	+	
S		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

よって、求める最小値は $a = \frac{1}{3}$ のとき

$$\begin{aligned} S &= 6 \cdot \frac{1}{3} - 2 \log \frac{1}{3} - 2 - \log 5 \\ &= 2 \log 3 - \log 5 \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad 2 \log 3 - \log 5$$