

[解答]

(1)	a	7
	b	8
(2)	$-\frac{3}{2}$	

[解説]

(1)

もう1つの解を c とする。解と係数の関係より、

$$(-1) + (-1) + c = -\frac{a}{2} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$(-1) \cdot (-1) + (-1) \cdot c + c \cdot (-1) = \frac{b}{2} \quad \dots \textcircled{2}$$

$$(-1) \cdot (-1) \cdot c = -\frac{3}{2} \quad \dots \textcircled{3}$$

が成り立つ。③より、

$$c = -\frac{3}{2}$$

である。①に代入すると、

$$a = -2(c - 2) = 7$$

であり、②に代入すると、

$$b = 2(1 - 2c) = 8$$

である。

(2)

(1)より、もう1つの解は $x = -\frac{3}{2}$ である。

倍角の公式より、

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

である。 $\cos x = t$ とおくと、 x が実数全体を動くとき t は $-1 \leq t \leq 1$ を動く。このとき、

$$(\text{与式}) = 2 + 4at - (2t^2 - 1) = -2(t-a)^2 + 2a^2 + 3$$

と表すことができ、これを $f(t)$ とおく。以下 a の値で場合分けを行う。

[1] $a < -1$ のとき

$f(t)$ が最大となるのは $t = -1$ のときであるから、 a の値は、

$$f(-1) = 7$$

$$\Leftrightarrow -4a + 1 = 7$$

$$\Leftrightarrow a = -\frac{3}{2}$$

となり、これは $a < -1$ を満たす。

[2] $-1 \leq a < 1$ のとき

$f(t)$ が最大となるのは $t = a$ のときであるから、 a の値は、

$$f(a) = 7$$

$$\Leftrightarrow 3 + 2a^2 = 7$$

$$\Leftrightarrow a = \pm\sqrt{2}$$

となるが、これは $-1 \leq a < 1$ を満たさず不適である。

[3] $a \geq 1$ のとき

$f(t)$ が最大となるのは $t = 1$ のときであるから、 a の値は、

$$f(1) = 7$$

$$\Leftrightarrow 4a + 1 = 7$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{3}{2}$$

となり、これは $a \geq 1$ を満たす。

以上[1], [2], [3]より求める a は $a = \pm\frac{3}{2}$ である。

(答) $a = \pm\frac{3}{2}$

[解答]

$$4 < a < 6$$

[解説]

$X = 3^x, Y = 2^y$ とおく。 $X > 0$ かつ $Y > 0$ を満たし、

$$\begin{cases} 3X + 2Y = a \\ X + Y = 2 \end{cases}$$

$$\therefore (X, Y) = (a-4, 6-a)$$

が成り立つような a を求めればよい。よって、求める条件は、

$$「a-4 > 0」 \text{ かつ } 「6-a > 0」$$

$$\therefore 4 < a < 6$$

である。

(1)

C_1 と C_2 の共有点が1点であるとき、その共有点で C_1 と C_2 は共通の接線をもつ。 $y=x^2$ のとき
 $y'=2x$ より

$$2x=1$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$$

であるから、接点の座標は $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ である。これより、 C_1 は点 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ を通り、その点における

接線の傾きが1とわかる。 $y=-x^2+ax+b$ のとき $y'=-2x+a$ であるから、

$$\begin{cases} \frac{1}{4} = -\left(\frac{1}{2}\right)^2 + a \cdot \frac{1}{2} + b \\ 1 = -2 \cdot \frac{1}{2} + a \end{cases}$$

$$\therefore (a, b) = \left(2, -\frac{1}{2}\right)$$

となる。

$$(\text{答}) (a, b) = \left(2, -\frac{1}{2}\right)$$

(2)

C_1 は点 $(1, 1)$ を通るから、

$$1 = -1 + a + b$$

$$\Leftrightarrow a + b = 2$$

・・・①

が成り立つ。 C_1, C_2 の式について y を消去すると

$$-x^2 + ax + (2-a) = x^2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - ax - (2-a) = 0$$

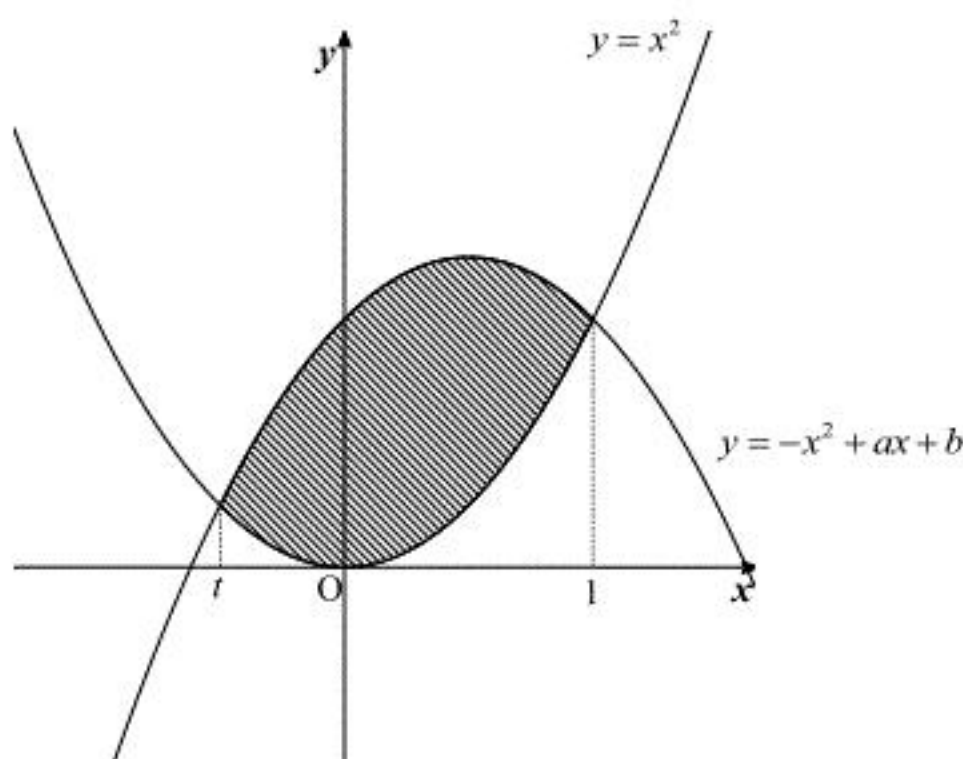
$$\Leftrightarrow (x-1)\{2x+(2-a)\} = 0$$

となるから、 C_1, C_2 の x 座標は $x=1, \frac{a-2}{2}$ である。 $t = \frac{a-2}{2}$ とおくと $t \neq 1$ のとき異なる2つの

共有点をもつ。以下、 t と1の大小で場合分けをする。

[1] $t < 1$ のとき

C_1, C_2 とそれらで囲まれる部分を斜線部で図示すると以下ようになる。



斜線部分の面積が $\frac{9}{8}$ であるとき、

$$\int_t^1 \{(-x^2 + ax + b) - x^2\} dx = \frac{9}{8}$$

$$\Leftrightarrow \int_t^1 -2(x-1)(x-t) dx = \frac{9}{8}$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \frac{1}{6} (1-t)^3 = \frac{9}{8}$$

$$\Leftrightarrow (1-t)^3 = \frac{27}{8}$$

$$\therefore t = -\frac{1}{2}$$

であり、これは $t < 1$ を満たす。点 $(1, 1)$ 以外の共有点の座標は $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ であるから

$$\frac{1}{4} = -\frac{1}{4} + a \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + b$$

$$\Leftrightarrow a - 2b = -1$$

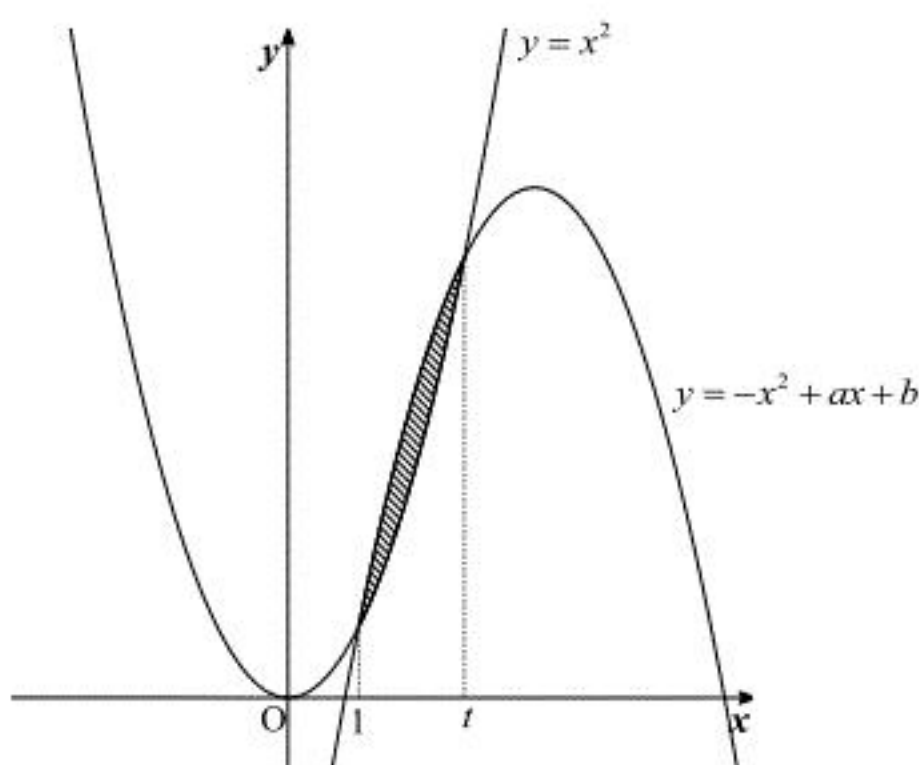
が成り立つ。したがって、これと①より、

$$(a, b) = (1, 1)$$

である。

[2] $t > 1$ のとき

C_1, C_2 とそれらで囲まれる部分を斜線部で図示すると以下ようになる。



斜線部分の面積が $\frac{9}{8}$ であるとき、

$$\int_1^t \{(-x^2 + ax + b) - x^2\} dx = \frac{9}{8}$$

$$\Leftrightarrow \int_1^t -2(x-1)(x-t) dx = \frac{9}{8}$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \frac{1}{6} (t-1)^3 = \frac{9}{8}$$

$$\Leftrightarrow (t-1)^3 = \frac{27}{8}$$

$$\therefore t = \frac{5}{2}$$

であり、これは $t > 1$ を満たす。点 $(1, 1)$ 以外の共有点の座標は $\left(\frac{5}{2}, \frac{25}{4}\right)$ であるから、

$$\frac{25}{4} = -\frac{25}{4} + a \cdot \frac{5}{2} + b$$

$$\Leftrightarrow 5a + 2b = 25$$

が成り立つ。したがって、これと①より、

$$(a, b) = (7, -5)$$

である。

以上[1], [2]より、求める a, b の組は、

$$(a, b) = (1, 1), (7, -5)$$

である。

$$(\text{答}) (a, b) = (1, 1), (7, -5)$$