

〔解答〕

(1)	(i)	$y = -x^2 + 3$
	(ii)	$y = -x^2 - 4x - 1$
(2)	10 個	

〔解説〕

(1)(i)

C を原点に関して対称移動してできる曲線 C' の方程式は、 C の方程式について x に $-x$ を、 y に $-y$ を置き換えたものになるから

$$-y = (-x)^2 - 2(-x) - 2 \Leftrightarrow y = -x^2 - 2x + 2$$

となる。また、 C' を x 軸の正の方向に 1 だけ平行移動してできる曲線の方程式は、 C' の方程式について x に $x-1$ を置き換えたものになるから

$$y = -(x-1)^2 - 2(x-1) + 2 \Leftrightarrow y = -x^2 + 3$$

となる。よって、求める曲線の方程式は $y = -x^2 + 3$ である。

(ii)

C を x 軸の正の方向に 1 だけ平行移動してできる曲線 C'' の方程式は、 C の方程式について x に $x-1$ を置き換えたものになるから

$$y = (x-1)^2 - 2(x-1) - 2 \Leftrightarrow y = x^2 - 4x + 1$$

となる。また、 C'' を原点に関して対称移動してできる曲線の方程式は、 C'' の方程式について x に $-x$ を、 y に $-y$ を置き換えたものになるから

$$-y = (-x)^2 - 4(-x) + 1 \Leftrightarrow y = -x^2 - 4x - 1$$

となる。よって、求める曲線の方程式は $y = -x^2 - 4x - 1$ である。

(2)

不等式 $y < -x^2 + 2x + 5$ を満たす自然数の組 (x, y) の個数を求める。まず、 x, y が自然数であるためには、 $x > 0, y > 0$ より

$$-x^2 + 2x + 5 > 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 < 6$$

となり、 $x=1, 2, 3$ となることが必要であることがわかる。逆に、各 x の値に対して、 $-x^2 + 2x + 5$ の値および条件を満たす自然数の個数は、以下の表のようになる。

x	1	2	3
$-x^2 + 2x + 5$	6	5	2
$y < -x^2 + 2x + 5$ を満たす 自然数 y の個数	5	4	1

したがって、求める自然数 (x, y) の組の個数は

$$5 + 4 + 1 = 10$$

より、10 個であることがわかる。

(1)

大小2つのさいころを投げたとき、目の出方は全部で $6^2 (=36)$ 通りあり、これらは同様に確からしく起こる。 a_i と a_j の最小公倍数が6となるのは

$$\{a_i, a_j\} = \{2, 3\}, \{2, 6\}, \{3, 6\}, \{6, 6\}$$

のときであるから、組 (a_i, a_j) の総数は、順序に注意して

$${}_2C_1 \cdot 3 + 1 = 7 \text{ (通り)}$$

となる。よって、求める確率は $\frac{7}{36}$ である。

(答) $\frac{7}{36}$

(2)

大中小3つのさいころを投げたとき、目の出方は全部で $6^3 (=216)$ 通りあり、これらは同様に確からしく起こる。 a_i, a_j, a_k の最小公倍数が70となるのは、70が7の倍数であり、かつ3の倍数でないことに注意して

$$\{a_i, a_j, a_k\} = \{2, 2, 70\}, \{2, 70, 70\}, \{70, 70, 70\}$$

のときであることがわかる。よって、組 (a_i, a_j, a_k) の総数は、順序に注意して

$${}_3C_1 \cdot 2 + 1 = 7 \text{ (通り)}$$

となる。したがって、求める確率は $\frac{7}{216}$ である。

(答) $\frac{7}{216}$

(3)

次のように事象 A, B をおく。

A : a_i, a_j, a_k の最小公倍数が30である

B : i, j, k のいずれも5でない($\Leftrightarrow a_i, a_j, a_k$ のいずれも30でない)

このとき、求める条件付き確率 $P_A(B)$ は

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})}$$

と求めることができる。以下、各確率を求めることを考える。

[1] $P(A \cap B)$

a_i, a_j, a_k のいずれも30でない、かつ、 a_i, a_j, a_k の最小公倍数が30となる場合について考える。これは、30が2の倍数であり、5の倍数であることに注意して

$$\{a_i, a_j, a_k\} = \{2, 2, 15\}, \{2, 3, 15\}, \{2, 6, 15\}, \{2, 15, 15\}, \{3, 6, 15\}, \{6, 6, 15\}, \{6, 15, 15\}$$

のときであることがわかる。よって、組 (a_i, a_j, a_k) の総数は、順序に注意して

$$3! \cdot 3 + {}_3C_1 \cdot 4 = 30 \text{ (通り)}$$

となる。したがって、 $P(A \cap B) = \frac{30}{216}$ である。

[2] $P(A \cap \bar{B})$

a_i, a_j, a_k の少なくとも1つが30であり、かつ、 a_i, a_j, a_k の最小公倍数が30となる場合について考える。 $a_1, a_2, \dots, a_6$ のうち30より小さい2, 3, 6, 15はすべて30の約数であるから、 a_i, a_j, a_k の少なくとも1つが30であるとき、いずれも70でなければ、これらの最小公倍数は必ず30になる。逆に、 a_i, a_j, a_k の少なくとも1つが70であるとき、これらの最小公倍数は30にならない。よって、組 (a_i, a_j, a_k) の総数は、 $a_1, a_2, \dots, a_6$ の中から重複を許して3つ選ぶ順列の総数から、 $a_1, a_2, \dots, a_6$ の中から重複を許して3つ選ぶ順列の総数を引いたものと一致するため

$$5^3 - 4^3 = 61 \text{ (通り)}$$

となる。したがって、 $P(A \cap \bar{B}) = \frac{61}{216}$ である。

以上[1], [2]より、求める条件付き確率は

$$P_A(B) = \frac{\frac{30}{216}}{\frac{30}{216} + \frac{61}{216}} = \frac{30}{91}$$

であることがわかる。

(答) $\frac{30}{91}$

[解答]

$$\sin x = 0, -\frac{3}{5}$$

[解説]

三角関数の2倍角の公式、および3倍角の公式より

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$$

が成り立つから、これを与えられた等式に代入すると

$$\sin 3x - \frac{3}{2} \sin 2x + \sin^2 x + 4 \sin^3 x = 0$$

$$\Leftrightarrow 3 \sin x - 4 \sin^3 x - \frac{3}{2} \cdot 2 \sin x \cos x + \sin^2 x + 4 \sin^3 x = 0$$

$$\Leftrightarrow 3 \sin x - 3 \sin x \cos x + \sin^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x (\sin x - 3 \cos x + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x = 0 \quad \text{または} \quad \sin x - 3 \cos x + 3 = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。ここで、 $\sin x - 3 \cos x + 3 = 0$ について

$$\sin x - 3 \cos x + 3 = 0 \Leftrightarrow \sin x = 3(\cos x - 1) \quad \cdots \textcircled{2}$$

と変形して、②の両辺を2乗すると

$$\sin^2 x = 9(\cos x - 1)^2$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x = 9 \cos^2 x - 18 \cos x + 9$$

$$\Leftrightarrow 10 \cos^2 x - 18 \cos x + 8 = 0 \quad (\because \sin^2 x = 1 - \cos^2 x)$$

$$\Leftrightarrow 2(5 \cos x - 4)(\cos x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \frac{4}{5}, 1$$

となる。さらに、等式 $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ より、これらの値から $\sin x$ の値を求めると、

$$\cos x = 1 \text{ のとき : } \sin x = 0$$

$$\cos x = \frac{4}{5} \text{ のとき : } \sin x = \pm \frac{3}{5}$$

となる。そして、これらの $\cos x$ と $\sin x$ の値の組のうち、②を満たすものは

$$(\cos x, \sin x) = (1, 0), \left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$$

である。したがって、①と合わせて、求める $\sin x$ の値は 0 または $-\frac{3}{5}$ であることがわかる。

(1)

与えられた定積分を変形すると

$$S = \int_0^1 |x^3 - ax^2| dx = \int_0^1 x^2 |x - a| dx$$

となるから、以下、正の実数 a の値で場合分けをして S を求める。

[1] $0 < a < 1$ のとき

$$|x - a| = \begin{cases} -(x - a) & (0 \leq x \leq a) \\ x - a & (a \leq x \leq 1) \end{cases}$$

であるから、 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 x^2 |x - a| dx \\ &= \int_0^a -x^2 (x - a) dx + \int_a^1 x^2 (x - a) dx \\ &= \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{a}{3}x^3 \right]_0^a + \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{a}{3}x^3 \right]_a^1 \\ &= \left\{ \left(-\frac{1}{4}a^4 + \frac{1}{3}a^4 \right) - (-0 + 0) \right\} + \left\{ \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}a \right) - \left(\frac{1}{4}a^4 - \frac{1}{3}a^4 \right) \right\} \\ &= \frac{1}{6}a^4 - \frac{1}{3}a + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

と計算できる。

[2] $1 \leq a$ のとき

$$|x - a| = -(x - a) \quad (0 \leq x \leq 1)$$

であるから、 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 x^2 |x - a| dx \\ &= \int_0^1 -x^2 (x - a) dx \\ &= \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{a}{3}x^3 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3}a - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

と計算できる。

以上[1], [2]より、 S は

$$S = \begin{cases} \frac{1}{6}a^4 - \frac{1}{3}a + \frac{1}{4} & (0 < a < 1) \\ \frac{1}{3}a - \frac{1}{4} & (1 \leq a) \end{cases}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad S = \begin{cases} \frac{1}{6}a^4 - \frac{1}{3}a + \frac{1}{4} & (0 < a < 1) \\ \frac{1}{3}a - \frac{1}{4} & (1 \leq a) \end{cases}$$

(2)

(1)の結果を用いて、 $0 < a$ の範囲における S の最小値を求める。(1)の結果より、 $1 \leq a$ の範囲

における S の最小値は、 $a = 1$ のとき $\frac{1}{12}$ である。ここで、 $S(a) = \frac{1}{6}a^4 - \frac{1}{3}a + \frac{1}{4}$ とおくと、

$S(1) = \frac{1}{12}$ であるから、 $S(a)$ の $0 < a \leq 1$ の範囲における最小値が、 a が正の実数全体を動く

ときの S の最小値である。ここで、

$$\begin{aligned} S'(a) &= \frac{2}{3}a^3 - \frac{1}{3} \\ &= \frac{2}{3} \left(a^3 - \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

より、 $0 < a \leq 1$ の範囲で $S'(a) = 0$ を満たす a の値は、

$$a^3 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = 2^{-\frac{1}{3}} \quad (\because 0 < a)$$

であるから、 $S(a)$ の $0 < a \leq 1$ の範囲における増減表は以下のようになる。

a	(0)	...	$2^{-\frac{1}{3}}$	...	1
$S'(a)$		-	0	+	
$S(a)$		$\searrow$	最小	$\nearrow$	$\frac{1}{12}$

上表より、 $S(a)$ の $0 < a \leq 1$ の範囲における最小値は、

$$\begin{aligned} S\left(2^{-\frac{1}{3}}\right) &= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2^{-\frac{1}{3}} - \frac{1}{3} \cdot 2^{-\frac{1}{3}} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{1 - 2^{-\frac{1}{3}}}{4} \end{aligned}$$

であり、これが求める最小値である。

$$(\text{答}) \quad a = 2^{-\frac{1}{3}} \text{ のとき、最小値 } S = \frac{1 - 2^{-\frac{1}{3}}}{4} \text{ をとる}$$