

〔解答〕

$$x = 3 + \sqrt{17}$$

〔解説〕

まず、真数条件より、

$$x-2 > 0 \text{ かつ } x-4 > 0 \text{ かつ } \log_2(x-2) - \log_{\frac{1}{2}}(x-4) > 0$$

$$\Leftrightarrow x > 2 \text{ かつ } x > 4 \text{ かつ } \log_2(x-2) + \log_2(x-4) > 0$$

$$\Leftrightarrow x > 4 \text{ かつ } \log_2(x-2)(x-4) > 0$$

となる。ここで2つ目の不等式について、底2は1より大きいから、

$$\log_2(x-2)(x-4) > 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x-4) > 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 7 > 0$$

$$\Leftrightarrow x < 3 - \sqrt{2} \text{ または } x > 3 + \sqrt{2}$$

である。よって真数条件は $x > 4$ との共通部分を取って、 $x > 3 + \sqrt{2}$ となる。この条件の下で与えられた等式を解くと、

$$\log_2 \left(\log_2(x-2) - \log_{\frac{1}{2}}(x-4) \right) = 2$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x-2)(x-4) = 4$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x-4) = 16$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \pm \sqrt{17}$$

$$\therefore x = 3 + \sqrt{17} \left(\because x > 3 + \sqrt{2} \right)$$

となる。

2

(1)

$x+2y=2 \Leftrightarrow x=-2y+2$ の表す図形と、 $x^2+y^2=2x$ の表す図形の交点の y 座標は

$$(-2y+2)^2+y^2=2(-2y+2)$$

$$\Leftrightarrow y\left(y-\frac{4}{5}\right)=0$$

$$\therefore y=0, \frac{4}{5}$$

である。これを $x+2y=2$ に代入して、交点の座標 $(2, 0), \left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right)$ を得る。

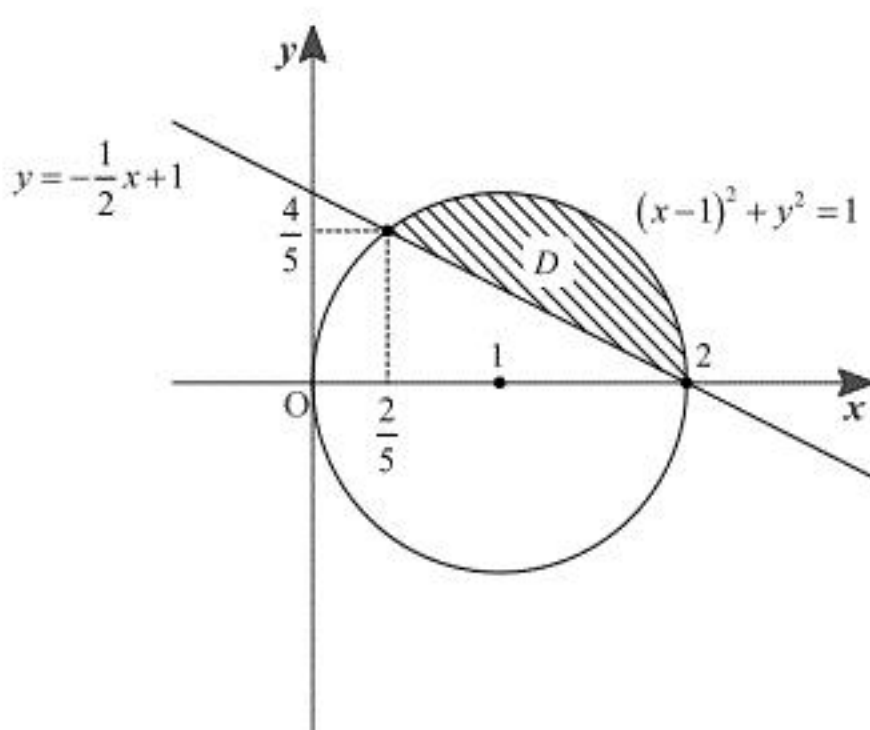
$$(\text{答}) (2, 0), \left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

(2)

$$\begin{cases} x+2y \geq 2 \\ x^2+y^2 \leq 2x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \geq -\frac{1}{2}x+1 \\ (x-1)^2+y^2 \leq 1 \end{cases}$$

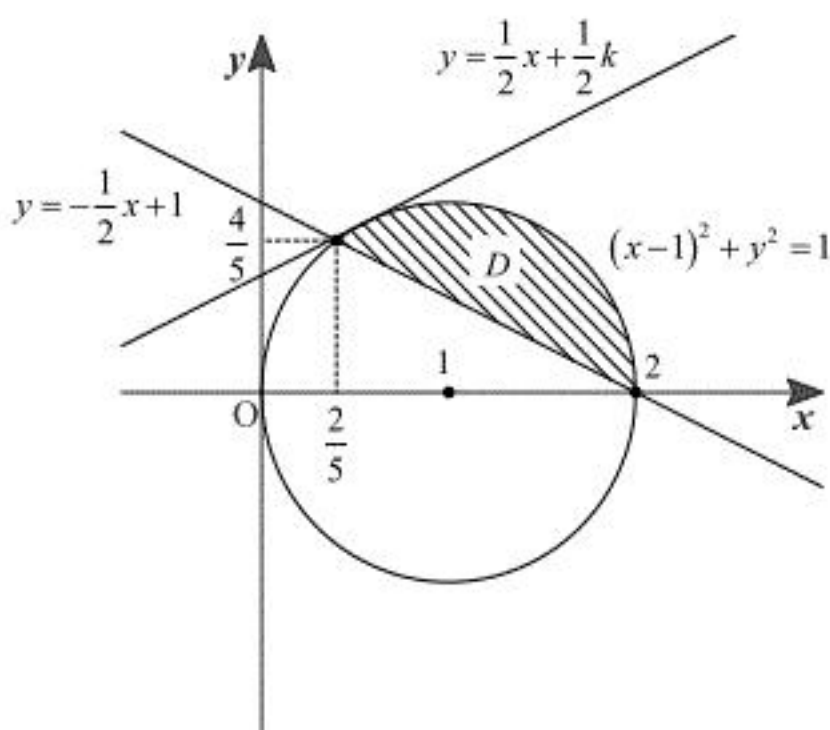
であるから、これと(1)の結果より、領域 D は下図斜線部のようにになる。ただし、境界線も含む。



ここで、 $2y-x=k$ とおく。 $2y-x=k \Leftrightarrow y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}k$ より、この方程式は傾き $\frac{1}{2}$ 、 y 切片 $\frac{1}{2}k$

の直線を表している。直線 $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}k$ が、領域 D と共通部分を持つような k の値の、最大値

および最小値を求める。まず、 k が最大値をとるときは、下図のようになるときである。



すなわち、直線 $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}k$ が円 $(x-1)^2+y^2=1$ に第一象限で接するときである。このとき、 x

についての2次方程式

$$(x-1)^2+\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}k\right)^2=1$$

$$\Leftrightarrow 5x^2+2x(k-4)+k^2=0$$

の判別式が0となるので

$$(k-4)^2-5\cdot k^2=0$$

$$\Leftrightarrow k^2+2k-4=0$$

$$\therefore k=-1\pm\sqrt{5}$$

を得る。ただし、 $k=-1-\sqrt{5}$ のとき、直線 $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}k$ と円 $(x-1)^2+y^2=1$ は第四象限で接す

るので、不適である。 $k=-1+\sqrt{5}$ のとき、接点の x 座標は

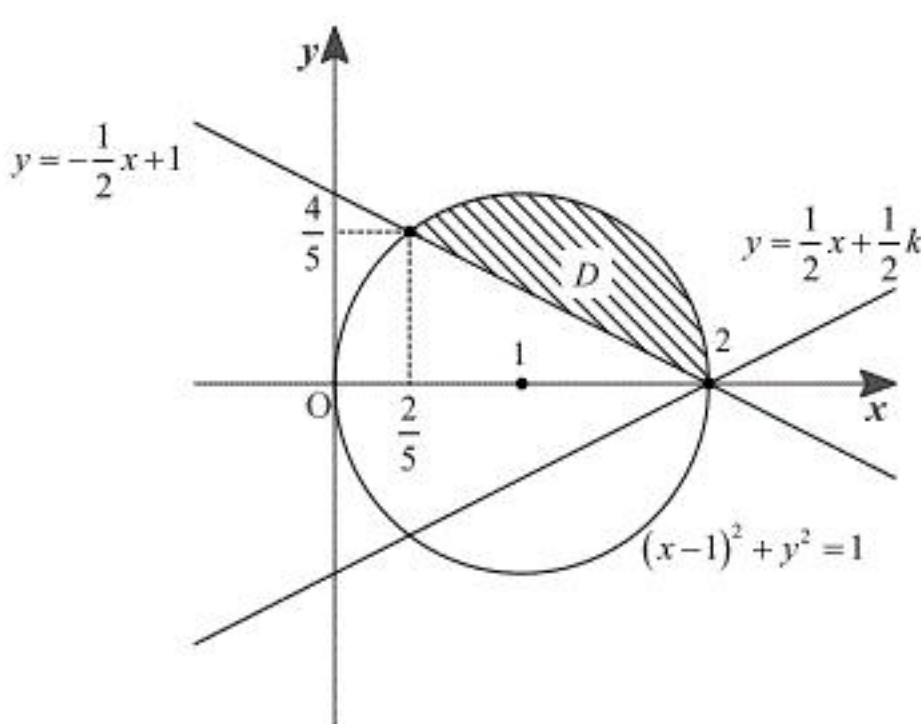
$$x=-\frac{-1+\sqrt{5}-4}{5}$$

$$=1-\frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\geq 1-\frac{3}{5}$$

$$=\frac{2}{5}$$

となるため、接点は確かに D 上に存在する。ゆえに、 k の最大値は $-1+\sqrt{5}$ である。つづけて、 k が最小値をとるときは、下図のようになるときである。



すなわち、直線 $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}k$ が点 $(2, 0)$ を通過するときである。ゆえに、 k の最小値は

$$0=\frac{1}{2}\cdot 2+\frac{1}{2}k$$

$$\Leftrightarrow k=-2$$

となる。以上のことから、 $2y-x$ の最大値は $-1+\sqrt{5}$ 、最小値は -2 となる。

$$(\text{答}) \text{ 最大値 } -1+\sqrt{5}, \text{ 最小値 } -2$$

〔解答〕

(1)	$\frac{10}{13}$
(2)	$\frac{26}{41}$

〔解説〕

(1)

まず、Aさんが白玉を取り出す事象を A_W 、Bさんに白と伝わる事象を B_W とする。事象 A_W が起こる確率を $P(A_W)$ と表すことにすると、Bさんに白と伝わったときに、Aさんが取り出した玉が白である条件付き確率 $P_{B_W}(A_W)$ は、

$$P_{B_W}(A_W) = \frac{P(B_W \cap A_W)}{P(B_W)}$$

と表せる。ここで、 B_W が起こるときは、

[1] Aさんが白玉を取り出して、Bさんに白と伝えたとき

[2] Aさんが赤玉を取り出して、Bさんに白と伝えたとき

のいずれかであり、これらは互いに排反であるから、

$$P(B_W) = \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{6} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{6} = \frac{13}{30}$$

となる。また、[1]は事象 $B_W \cap A_W$ であるから、

$$P(B_W \cap A_W) = \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{6} = \frac{1}{3}$$

となる。以上より、

$$P_{B_W}(A_W) = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{13}{30}} = \frac{10}{13}$$

である。

(2)

まず、Cさんに白と伝わる事象を C_W とする。(1)と同様に、Cさんに白と伝わったときに、Aさんが取り出した玉が白である条件付き確率 $P_{C_W}(A_W)$ は、

$$P_{C_W}(A_W) = \frac{P(C_W \cap A_W)}{P(C_W)}$$

と表せる。ここで、 C_W が起こるときは、

[1] Bさんが白と伝えられ、Cさんに白と伝えたとき

[2] Bさんが赤と伝えられ、Cさんに白と伝えたとき

のいずれかであり、これらは互いに排反である。(1)より、Bさんが白と伝えられる確率は

$P(B_W)$ であり、赤と伝えられる確率は $1 - P(B_W)$ であるから、

$$\begin{aligned} P(C_W) &= P(B_W) \cdot \frac{5}{6} + \{1 - P(B_W)\} \cdot \frac{1}{6} \\ &= \frac{13}{30} \cdot \frac{5}{6} + \frac{17}{30} \cdot \frac{1}{6} \\ &= \frac{41}{90} \end{aligned}$$

となる。一方で、事象 $C_W \cap A_W$ が起こるときは

[1] Aさんが白玉を取り出して、BさんとCさんのどちらにも白と伝わったとき

[2] Aさんが白玉を取り出して、Bさんには赤、Cさんには白と伝わったとき

のいずれかであり、これらは互いに排反であるから、

$$P(C_W \cap A_W) = \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{13}{45}$$

である。以上より、

$$P_{C_W}(A_W) = \frac{\frac{13}{45}}{\frac{41}{90}} = \frac{26}{41}$$

である。

(1)

$$y = ax^2 + bx + c \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$y = -x \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$y = 2x \quad \cdots \textcircled{3}$$

とおく。ここで、 $\textcircled{1}$ と $\textcircled{2}$ 、 $\textcircled{1}$ と $\textcircled{3}$ を連立して y を消去すると、

$$ax^2 + (b+1)x + c = 0 \quad \cdots \textcircled{4}$$

$$ax^2 + (b-2)x + c = 0 \quad \cdots \textcircled{5}$$

を得る。 $\textcircled{4}$ と $\textcircled{5}$ の判別式を D_1, D_2 をおくと

$$D_1 = (b+1)^2 - 4ac$$

$$D_2 = (b-2)^2 - 4ac$$

となる。ここで、 $D_1 = 0, D_2 = 0$ であることから、 $(b+1)^2 = (b-2)^2 = 4ac$ である。したがって、

$$(b+1)^2 = (b-2)^2$$

$$\Leftrightarrow b = \frac{1}{2}$$

となる。また、 $y = ax^2 + bx + c$ が放物線を描くことから、 $a \neq 0$ である。これと $b = \frac{1}{2}$ であるこ

とから、

$$4ac = \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow c = \frac{9}{16a}$$

となる。以上より C の方程式は $y = ax^2 + \frac{1}{2}x + \frac{9}{16a}$ である。

$$(\text{答}) \quad y = ax^2 + \frac{1}{2}x + \frac{9}{16a}$$

(2)

$\textcircled{1}$ について、

$$y' = 2ax + \frac{1}{2}$$

である。まず ℓ_1 について、 x 座標が α である点を接点とする接線の方程式は

$$y = \left(2a\alpha + \frac{1}{2}\right)(x - \alpha) + a\alpha^2 + \frac{1}{2}\alpha + \frac{9}{16a}$$

$$= \left(2a\alpha + \frac{1}{2}\right)x - a\alpha^2 + \frac{9}{16a}$$

となる。これが $\textcircled{2}$ と一致するので、傾きを比較すると

$$2a\alpha + \frac{1}{2} = -1$$

$$\therefore \alpha = -\frac{3}{4a}$$

となる。また、同様に ℓ_2 について、 x 座標が β である点を接点とする接線の方程式は

$$y = \left(2a\beta + \frac{1}{2}\right)x - a\beta^2 + \frac{9}{16a} \text{ である。これが } \textcircled{3} \text{ と一致するので、傾きを比較すると}$$

$$2a\beta + \frac{1}{2} = 2$$

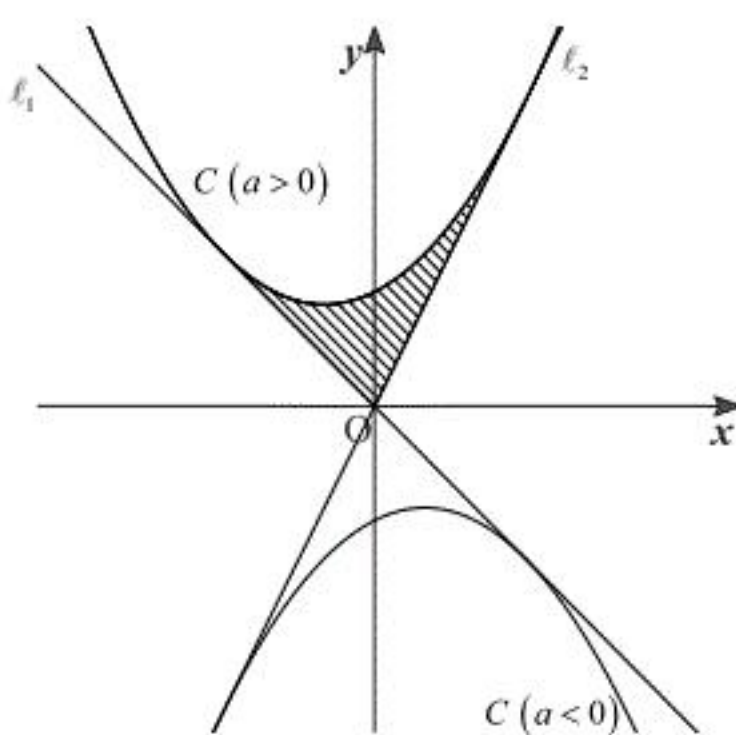
$$\therefore \beta = \frac{3}{4a}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \alpha = -\frac{3}{4a}, \beta = \frac{3}{4a}$$

(3)

ℓ_1, ℓ_2, C を図示すると下図を得る。ただし、 $a > 0$ のときの C と $a < 0$ のときの C をともに同じ図に描画している。



ℓ_1, ℓ_2, C で囲まれた領域の面積を S とする。ここで、 α, β は $\textcircled{4}$ 、 $\textcircled{5}$ の重解であることから、 $a > 0$ のとき、

$$\begin{aligned} S &= \int_{\alpha}^0 \left\{ ax^2 + \frac{1}{2}x + \frac{9}{16a} - (-x) \right\} dx + \int_0^{\beta} \left\{ ax^2 + \frac{1}{2}x + \frac{9}{16a} - 2x \right\} dx \\ &= \int_{\alpha}^0 a(x - \alpha)^2 dx + \int_0^{\beta} a(x - \beta)^2 dx \end{aligned}$$

であり、 $a < 0$ のとき、

$$\begin{aligned} S &= \int_{\beta}^0 \left\{ 2x - \left(ax^2 + \frac{1}{2}x + \frac{9}{16a} \right) \right\} dx + \int_0^{\alpha} \left\{ (-x) - \left(ax^2 + \frac{1}{2}x + \frac{9}{16a} \right) \right\} dx \\ &= \int_{\beta}^0 -a(x - \beta)^2 dx + \int_0^{\alpha} -a(x - \alpha)^2 dx \end{aligned}$$

である。これらは符号と積分範囲を入れ替えれば同じ式であるので、 a の値にかかわらず

$$S = \int_{\alpha}^0 a(x - \alpha)^2 dx + \int_0^{\beta} a(x - \beta)^2 dx$$

と表すことができる。ここで、 $\beta = -\alpha = \frac{3}{4a}$ であることから S を計算すると、

$$\begin{aligned} S &= \int_{\alpha}^0 a(x - \alpha)^2 dx + \int_0^{\beta} a(x - \beta)^2 dx \\ &= \left[\frac{a}{3}(x - \alpha)^3 \right]_{\alpha}^0 + \left[\frac{a}{3}(x - \beta)^3 \right]_0^{\beta} \\ &= \frac{a}{3}(\beta^3 - \alpha^3) \\ &= \frac{2}{3}a\beta^3 \quad (\because \alpha = -\beta) \\ &= \frac{9}{32a^2} \left(\because \beta = \frac{3}{4a} \right) \end{aligned}$$

となる。 $S = \frac{1}{2}$ であることから、

$$\frac{9}{32a^2} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow a^2 = \frac{9}{16}$$

$$\Leftrightarrow a = \pm \frac{3}{4}$$

となる。したがって、放物線 C の方程式は

$$y = \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}, y = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$$

である。

$$(\text{答}) \quad y = \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}, y = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$$