

〔解答〕

実部	$\frac{1}{4}$	虚部	$\frac{\sqrt{3}}{4}$
----	---------------	----	----------------------

〔解説〕

与条件より実数 r ($r > 0$) を用いて

$$\begin{aligned}\frac{z-1}{z} &= r \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) \\ &= ir\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow z-1=irz$$

$$\therefore z = \frac{1}{1-ir} = \frac{1+ir}{1+r^2} \quad \dots \textcircled{1}$$

と表すことができる。ここで、与条件より $|z| = \frac{1}{2}$ なので

$$\left| \frac{1+ir}{1+r^2} \right| = \frac{1}{2}$$

が成り立つ。等式を変形すると

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{1+r^2}}{1+r^2} &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow 1+r^2 &= 4 \\ \therefore r &= \sqrt{3} \quad (\because r > 0)\end{aligned}$$

となる。よって①より

$$z = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$$

である。

(1)

題意を満たすには、 $a_1, a_2, \dots, a_n$ がすべて1から $n-1$ のいずれかとなればよい。カードを引く各回の試行は独立でカードの引き方は同様に確からしいから、求める確率は

$$\left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

となる。

$$(\text{答}) \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

(2)

$a_1, a_2, \dots, a_n$ の最大値が n となる事象を A_n 、最小値が1となる事象を B_n とする。また、事象 Q に対してその事象が起こる確率を $P(Q)$ とすると、求める確率 P_n は

$$\begin{aligned} P_n &= P(A_n \cap B_n) \\ &= P(A_n) + P(B_n) - P(A_n \cup B_n) \end{aligned}$$

と表せる。事象 A_n, B_n はそれぞれ $n, 1$ が一回も出ない事象の余事象であるので、(1)の結果より

$$P(A_n) = 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

$$P(B_n) = 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

となる。また、事象 $A_n \cup B_n$ は $1, n$ がともに一回も出ない事象の余事象であるので、(1)と同様に考えて

$$\begin{aligned} P(A_n \cup B_n) &= 1 - \left(\frac{n-2}{n}\right)^n \\ &= 1 - \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n \end{aligned}$$

となる。よって求める確率は

$$\begin{aligned} P_n &= \left\{1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\right\} + \left\{1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\right\} - \left\{1 - \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n\right\} \\ &= 1 - 2\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n + \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) 1 - 2\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n + \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n$$

(3)

(2)の結果より

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{1 - 2\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n + \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n\right\} \\ &= 1 - 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-1}{n}\right)^n + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-2}{n}\right)^n \\ &= 1 - 2e^{-1} + e^{-2} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) 1 - 2e^{-1} + e^{-2}$$

3

〔解答〕

$$-1 \leq a \leq 2$$

〔解説〕

与えられた命題は

任意の実数 x に対して $x^2 - x + 2 \geq |x - a|$ が成立する

という命題と同値である。この不等式を場合分けすると

$$x^2 - x + 2 \geq |x - a|$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 2 + a \geq 0 & (x \geq a) \\ x^2 + 2 - a \geq 0 & (x < a) \end{cases}$$

となる。ここで

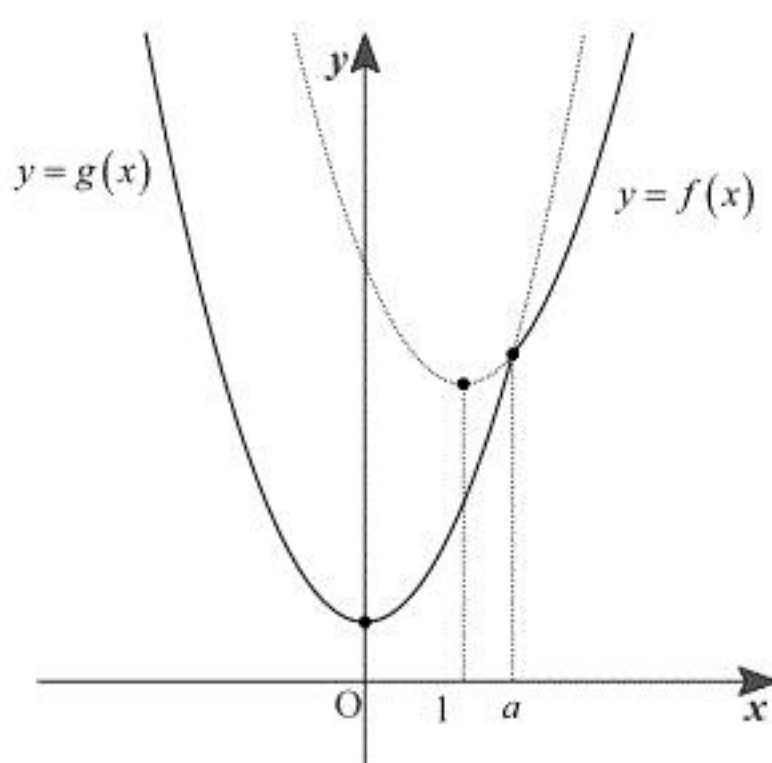
$$f(x) = x^2 - 2x + 2 + a = (x - 1)^2 + 1 + a \quad (x \geq a)$$

$$g(x) = x^2 + 2 - a \quad (x < a)$$

とする。

[1] $1 \leq a$ のとき

グラフは以下のようになる。



$f(x)$ は $x = a$, $g(x)$ は $x = 0$ で最小値をとる。よって

$$\begin{cases} f(a) \geq 0 \\ g(0) \geq 0 \end{cases}$$

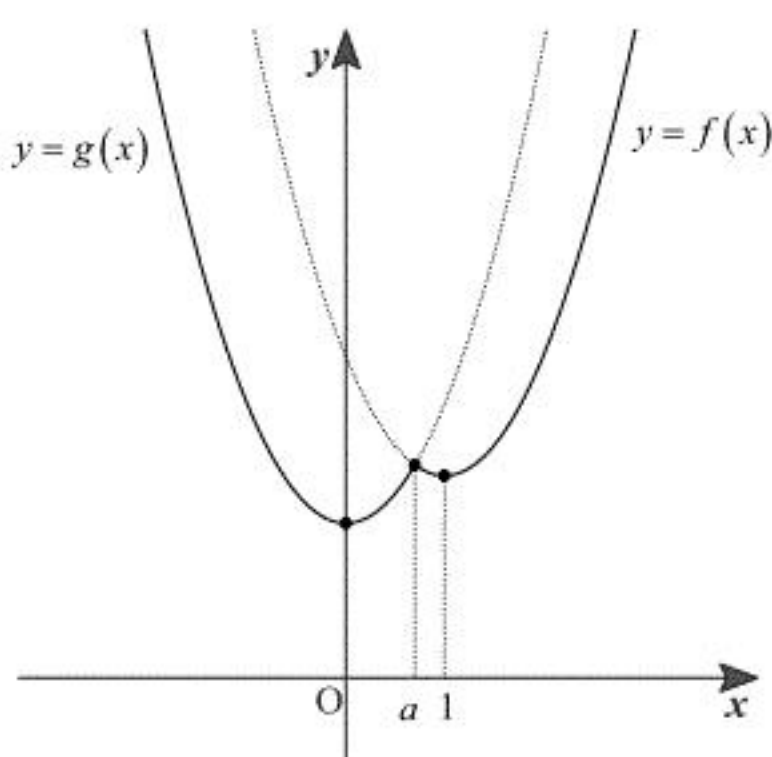
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - a + 2 \geq 0 \\ 2 - a \geq 0 \end{cases}$$

$$\therefore 1 \leq a \leq 2 \quad (\because 1 \leq a)$$

となる。

[2] $0 \leq a < 1$ のとき

グラフは以下のようになる。



$f(x)$ は $x = 1$ で最小値をとる。 $g(x)$ は $0 < a < 1$ のとき $x = 0$ で最小値をとり、 $a = 0$ のときは $x < a$ 上で $g(x) > g(0)$ を満たす。よって

$$\begin{cases} f(1) \geq 0 \\ g(0) \geq 0 \end{cases}$$

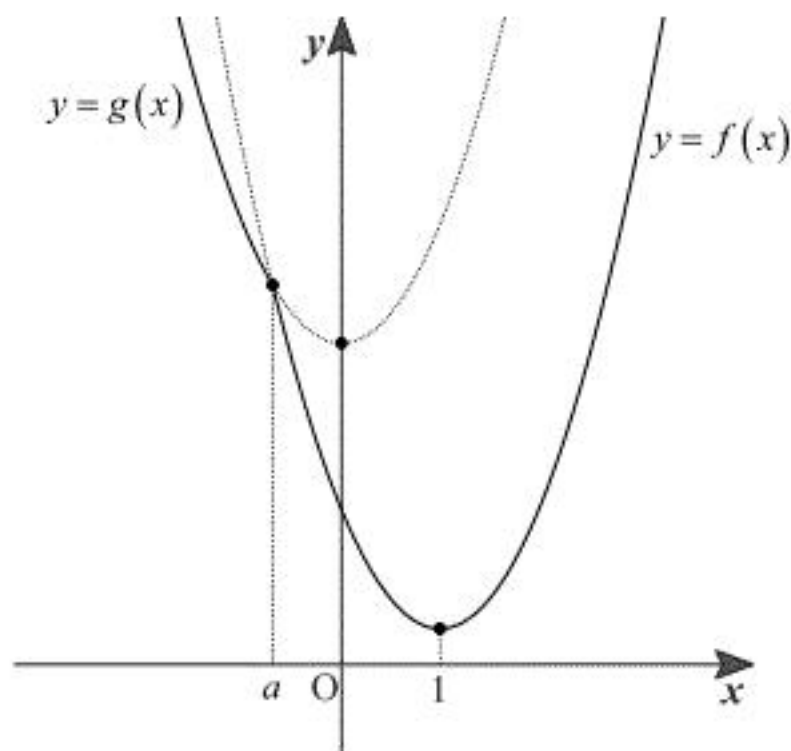
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 + a \geq 0 \\ 2 - a \geq 0 \end{cases}$$

$$\therefore 0 \leq a < 1 \quad (\because 0 \leq a < 1)$$

となる。

[3] $a < 0$ のとき

グラフは以下のようになる。



$f(x)$ は $x = 1$ で最小値をとる。 $g(x)$ は $x < a$ 上で $g(a) < g(x)$ を満たす。よって

$$\begin{cases} f(1) \geq 0 \\ g(a) \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 + a \geq 0 \\ a^2 - a + 2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\therefore -1 \leq a < 0 \quad (\because a < 0)$$

となる。

以上[1], [2], [3]より、求める答えは $-1 \leq a \leq 2$ である。

(1)

与式より

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{4x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} \\
 &= \frac{x(x^2-3)}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} \\
 &= \frac{(x+\sqrt{3})x(x-\sqrt{3})}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}
 \end{aligned}$$

となるので、 $x^2+1>0$ に注意して、 $f(x)$ の増減表は下表のようになる。

x	...	$-\sqrt{3}$	...	0	...	$\sqrt{3}$	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	4	$\nearrow$	5	$\searrow$	4	$\nearrow$

よって、 $x=\pm\sqrt{3}$ で極小値4、 $x=0$ で極大値5をとる。

(答) 極大値 5 ($x=0$)、極小値 4 ($x=\pm\sqrt{3}$)

(2)

求める体積 V は

$$\begin{aligned}
 V &= \int_{-1}^1 \pi \{f(x)\}^2 dx \\
 &= \pi \int_{-1}^1 \left(\sqrt{x^2+1} + \frac{4}{\sqrt{x^2+1}} \right)^2 dx \\
 &= \pi \int_{-1}^1 \left(x^2+1 + 2 \cdot 4 + \frac{16}{x^2+1} \right) dx \\
 &= \pi \left[\frac{1}{3}x^3 + 9x \right]_{-1}^1 + 16\pi \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2+1} \\
 &= \frac{56\pi}{3} + 16\pi \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2+1}
 \end{aligned}$$

となる。ここで $x=\tan\theta$ と置換すると

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

であり、積分範囲は

x	$-1 \rightarrow 1$
θ	$-\frac{\pi}{4} \rightarrow \frac{\pi}{4}$

であることより、

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2+1} &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\tan^2\theta+1} \cdot \frac{1}{\cos^2\theta} d\theta \\
 &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\theta \cdot \frac{1}{\cos^2\theta} d\theta \\
 &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\theta \\
 &= [\theta]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \\
 &= \frac{\pi}{2}
 \end{aligned}$$

となる。よって、

$$V = \frac{56\pi}{3} + 8\pi^2$$

となる。

(答) $\frac{56\pi}{3} + 8\pi^2$