

【解答】

(1)	$\frac{1}{6}(a^2+2a+17)^{\frac{3}{2}}$	
(2)	S の最小値	$\frac{32}{3}$
	最小値を与える a	-1

【解説】

(1)

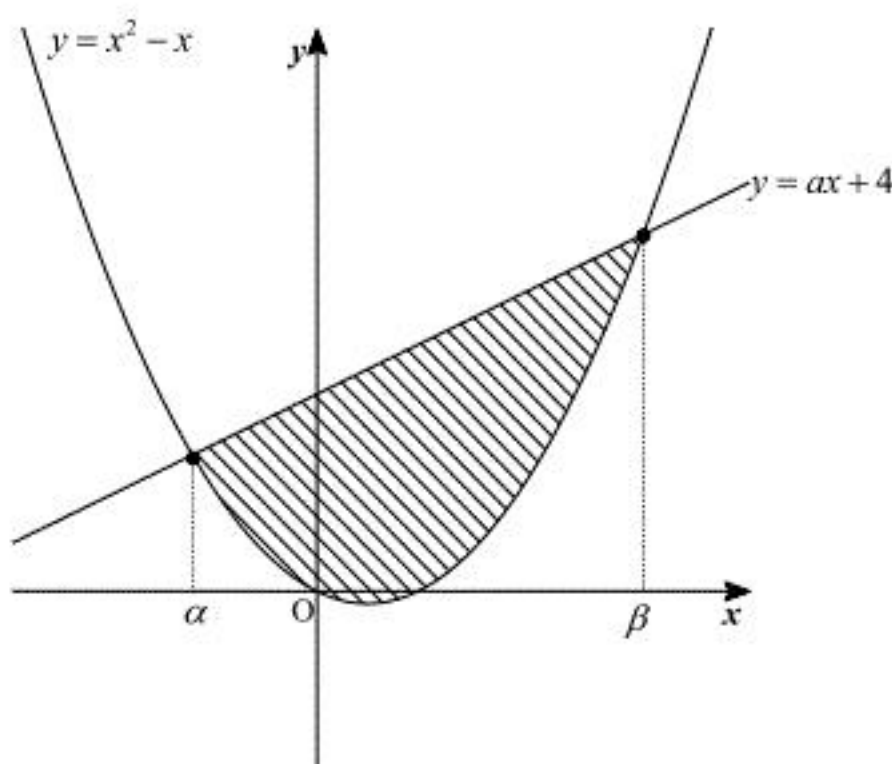
放物線 $y=x^2-x$ と直線 $y=ax+4$ から y を消去して得られる x の 2 次方程式

$$\begin{aligned} x^2-x &= ax+4 \\ \Leftrightarrow x^2-(a+1)x-4 &= 0 \end{aligned} \quad \cdots \textcircled{1}$$

について判別式を D とすると、

$$\begin{aligned} D &= \{-(a+1)\}^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) \\ &= (a+1)^2 + 16 \\ &> 0 \end{aligned}$$

となるので、 $\textcircled{1}$ は異なる 2 つの実数解をもつ。したがって放物線と直線は a の値によらず常に領域を囲むことがわかる。 $\textcircled{1}$ の 2 つの実数解を α, β ($\alpha < \beta$) とおくと、 S は下図の斜線部の面積である。



したがって、

$$\begin{aligned} S &= \int_{\alpha}^{\beta} \{ax+4-(x^2-x)\} dx \\ &= -\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta) dx \\ &= \frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3 \end{aligned}$$

となる。ここで $\textcircled{1}$ において解と係数の関係より

$$\begin{cases} \alpha+\beta=a+1 \\ \alpha\beta=-4 \end{cases}$$

であるから、

$$\begin{aligned} (\beta-\alpha)^2 &= (\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta \\ &= (a+1)^2 - 4 \cdot (-4) \\ &= a^2+2a+17 \end{aligned}$$

となり、 $\beta-\alpha > 0$ より $\beta-\alpha = \sqrt{a^2+2a+17}$ を得る。したがって求める面積 S は、

$$S = \frac{1}{6}(a^2+2a+17)^{\frac{3}{2}} \text{ である。}$$

(2)

$S = \frac{1}{6}(a^2+2a+17)^{\frac{3}{2}}$ より S が最小になるのは $a^2+2a+17$ が最小になるときである。

$$a^2+2a+17 = (a+1)^2 + 16$$

であるから、 $a^2+2a+17$ は $a=-1$ のとき最小値 16 をとる。したがって S は $a=-1$ のとき最小

となり、最小値は $\frac{1}{6} \cdot 16^{\frac{3}{2}} = \frac{32}{3}$ である。

(1)(a)

大量の種子から1つの種子を取り出したとき、それがRの種子であるという事象を R 、Wの種子であるという事象を W とする。さらに、Rの種子が発芽するという事象を R' 、Wの種子が発芽するという事象を W' とし、赤い花が開花するという事象を R'' 、白い花が開花する

という事象を W'' とする。このとき、題意より $P_R(R') = \frac{4}{5}$, $P_W(W') = \frac{3}{4}$, $P_{R'}(R'') = \frac{1}{2}$,

$P_{W'}(W'') = \frac{7}{10}$ が成り立つ。さて、種子R、Wを3:2で混ぜるとき、 $P(R) = \frac{3}{5}$, $P(W) = \frac{2}{5}$ が成

り立つ。また、まいた種子が発芽する確率は $P(R' \cup W')$ と表すことができ、 R' と W' は排反な事象であるから、

$$\begin{aligned} P(R' \cup W') &= P(R') + P(W') \\ &= P(R)P_R(R') + P(W)P_W(W') \\ &= \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} \\ &= \frac{39}{50} \end{aligned}$$

が得られる。

(答) $\frac{39}{50}$

(b)

求める確率は $P_{R' \cup W'}(R'') = \frac{P((R' \cup W') \cap R'')}{P(R' \cup W')}$ と表される。ここで、赤い花が咲くならば発芽し

ているため、 $(R' \cup W') \supset R''$ となることから、 $(R' \cup W') \cap R'' = R''$ である。したがって、

$$\begin{aligned} P((R' \cup W') \cap R'') &= P(R'') \\ &= P(R)P_R(R')P_{R'}(R'') \\ &= \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{6}{25} \end{aligned}$$

が成り立つ。これと(a)の結果より、求める確率は

$$\begin{aligned} P_{R' \cup W'}(R'') &= \frac{P((R' \cup W') \cap R'')}{P(R' \cup W')} \\ &= \frac{\frac{6}{25}}{\frac{39}{50}} \\ &= \frac{4}{13} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{4}{13}$

(2)

合計1000個の種子の集まりのうち、Rの種子の個数を x (x は0以上1000以下の整数)とする

と $P(R) = \frac{x}{1000}$, $P(W) = \frac{1000-x}{1000}$ が成り立つ。このとき赤い花が開花する確率は

$$\begin{aligned} P(R'') &= P(R)P_R(R')P_{R'}(R'') \\ &= \frac{x}{1000} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{1000} \cdot \frac{2}{5}x \end{aligned}$$

であり、白い花が開花する確率は、

$$\begin{aligned} P(W'') &= P(W)P_W(W')P_{W'}(W'') \\ &= \frac{1000-x}{1000} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{7}{10} \\ &= \frac{1}{1000} \cdot \frac{21}{40}(1000-x) \end{aligned}$$

である。よってこれらの確率の差を D とすると、

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{1000} \left| \frac{2}{5}x - \frac{21}{40}(1000-x) \right| \\ &= \frac{1}{40000} |37x - 21000| \end{aligned}$$

となる。 $\frac{21000}{37}$ の値がおおよそ567.57...となることから、

$$D = \begin{cases} \frac{1}{40000}(37x - 21000) & (x \geq 568 \text{ のとき}) \\ -\frac{1}{40000}(37x - 21000) & (x \leq 567 \text{ のとき}) \end{cases}$$

が成り立つ。以下、2つの範囲において各々の最小値を求める。

[1] $x \geq 568$ のとき

D は最小 $x=568$ のとき最小となり、最小値は $D = \frac{16}{40000}$ である。

[2] $x \leq 567$ のとき

D は最小 $x=567$ のとき最小となり、最小値は $D = \frac{21}{40000}$ である。

以上[1],[2]より、0以上1000以下のすべての整数 x に対し、 D が最小となるのは $x=568$ のときである。

(答) 568個

〔解答〕

(1)	14
(2)	$(x, y) = (-3, 1), (1, -1)$

〔解説〕

(1)

$f(x)$ を $x+1$ で割ったとき、余りが 7 で商が $g(x)$ であることから、

$$f(x) = (x+1)g(x) + 7$$

が成り立つ。また、 $g(x)$ を $2x^2 + 3x - 2$ で割った余りが $x-5$ であるから、商を $h(x)$ とすると、

$$\begin{aligned} g(x) &= (2x^2 + 3x - 2)h(x) + x - 5 \\ &= (x+2)(2x-1)h(x) + x - 5 \end{aligned}$$

が成り立つ。これを $f(x)$ の式に代入すると、

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+1)\{(x+2)(2x-1)h(x) + x - 5\} + 7 \\ &= (x+1)(x+2)(2x-1)h(x) + (x+1)(x-5) + 7 \end{aligned}$$

が成り立つ。したがって、

$$f(-2) = 0 \cdot h(-2) + (-1) \cdot (-7) + 7 = 14$$

となるから、 $f(x)$ を $x+2$ で割った余りは 14 となる。

(2)

$x+2y+1=0$ より、

$$x = -2y - 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

を得る。これを $3^{1-x} + 9^{1-y} = 82$ に代入して、

$$\begin{aligned} 3^{1+2y+1} + 9^{1-y} &= 82 \\ \Leftrightarrow 9 \cdot 9^y + 9 \cdot 9^{-y} &= 82 \end{aligned}$$

となる。ここで $Y = 9^y$ とおくと $Y > 0$ であり、

$$\begin{aligned} 9 \cdot 9^y + 9 \cdot 9^{-y} &= 82 \\ \Leftrightarrow 9Y + 9 \cdot \frac{1}{Y} &= 82 \\ \Leftrightarrow 9Y^2 + 9 &= 82Y \\ \Leftrightarrow (Y-9)(9Y-1) &= 0 \\ \therefore Y &= 9, \frac{1}{9} \end{aligned}$$

と解くことができる。なお、これらはいずれも $Y > 0$ を満たす。以下、 Y の値で場合分けして考える。

[1] $Y = 9$ のとき

$9^y = 9^1$ より $y = 1$ となり、 $\textcircled{1}$ より $x = -3$ が得られる。

[2] $Y = \frac{1}{9}$ のとき

$9^y = 9^{-1}$ より $y = -1$ となり、 $\textcircled{1}$ より $x = 1$ が得られる。

以上[1], [2]より、条件を満たす (x, y) の組は $(x, y) = (-3, 1), (1, -1)$ の 2 つである。

(1)

点 $(0, a)$ を中心とする半径 $r' (> 0)$ の円を考える。この円の方程式は $x^2 + (y - a)^2 = r'^2$ である。

この円と放物線 $C: y = x^2$ とが共有点を持つための必要十分条件は、連立方程式

$$\begin{cases} y = x^2 \\ x^2 + (y - a)^2 = r'^2 \end{cases}$$

が実数の組 (x, y) を解にもつことである。このことは、 $x^2 (\geq 0)$ を消去した y についての 2 次方程式

$$\begin{aligned} y + (y - a)^2 &= r'^2 \\ \Leftrightarrow y^2 + (1 - 2a)y + a^2 - r'^2 &= 0 \end{aligned} \quad \dots \textcircled{1}$$

に少なくとも 1 つの 0 以上の解が存在することと同値である。そこで 2 次関数

$$\begin{aligned} f(y) &= y^2 + (1 - 2a)y + a^2 - r'^2 \\ &= \left(y - \frac{2a - 1}{2} \right)^2 - r'^2 + \frac{4a - 1}{4} \end{aligned}$$

について考える。 $z = f(y)$ のグラフの軸は $y = \frac{2a - 1}{2}$ であり、条件 $a > \frac{1}{2}$ より、常に $\frac{2a - 1}{2} > 0$

である。したがって、 $\textcircled{1}$ が少なくとも 1 つの 0 以上の解をもつためには、 $\textcircled{1}$ の判別式が 0 以上となることが必要十分である。

$$\begin{aligned} D &= (1 - 2a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (a^2 - r'^2) \\ &= 4r'^2 - 4a + 1 \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} D &\geq 0 \\ \Leftrightarrow r'^2 &\geq \frac{4a - 1}{4} \\ \therefore r' &\geq \frac{\sqrt{4a - 1}}{2} \quad (\because r > 0) \end{aligned}$$

となり、 r' の最小値は $\frac{\sqrt{4a - 1}}{2}$ である。したがって $r = \frac{\sqrt{4a - 1}}{2}$ である。

$$(\text{答}) \quad r = \frac{\sqrt{4a - 1}}{2}$$

(2)

点 $(0, b)$ を中心とし放物線 C に接するような円のうち、半径が最小のものの半径を R とする

と、(1) より $R = \frac{\sqrt{4b - 1}}{2}$ である。この円が C_1 に外接するとき、

$$\text{「} C_1 \text{ と } C_2 \text{ の中心間距離」} = \text{「} C_1 \text{ と } C_2 \text{ の半径の和」}$$

が成り立つから、

$$b = a + r + R \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。 $R = \frac{\sqrt{4b - 1}}{2}$ の両辺は正なので辺々 2 乗すると、

$$\begin{aligned} R^2 &= \frac{4b - 1}{4} \\ \Leftrightarrow b &= R^2 + \frac{1}{4} \end{aligned} \quad \dots \textcircled{3}$$

となる。同様に (1) の結果を変形して

$$a = r^2 + \frac{1}{4} \quad \dots \textcircled{4}$$

が成り立つから、 $\textcircled{3}$ と $\textcircled{4}$ を $\textcircled{2}$ に代入して

$$\begin{aligned} R^2 + \frac{1}{4} &= r^2 + \frac{1}{4} + r + R \\ \Leftrightarrow R^2 - r^2 - (R + r) &= 0 \\ \Leftrightarrow (R + r)(R - r) - (R + r) &= 0 \\ \Leftrightarrow (R + r)(R - r - 1) &= 0 \\ \therefore R &= r + 1 \quad (\because R + r > 0) \end{aligned}$$

となり $R = r + 1$ を得る。よって題意は示された。

(証明終)