

【解答】

(1)	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
(2)	$\frac{9}{2}$

【解説】

(1)

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n + \sqrt{3n}} - \sqrt{n}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n + \sqrt{3n}} - \sqrt{n})(\sqrt{n + \sqrt{3n}} + \sqrt{n})}{\sqrt{n + \sqrt{3n}} + \sqrt{n}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \sqrt{3n} - n}{\sqrt{n + \sqrt{3n}} + \sqrt{n}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1 + \sqrt{\frac{3}{n}}} + 1} \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{2}
 \end{aligned}$$

である。

(2)

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{\tan^2 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (4 \cos^3 x - 3 \cos x)}{\frac{1}{\cos^2 x} - 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x (2 \cos x + 1)^2 (\cos x - 1)}{(\cos x + 1)(\cos x - 1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x (2 \cos x + 1)^2}{\cos x + 1} \\
 &= \frac{9}{2}
 \end{aligned}$$

である。

(1)

$\vec{v}_1 = (1, 0), \vec{v}_2 = (1, 1)$ であるので,

$$x_1 = 1, y_1 = 0, x_2 = 1, y_2 = 1$$

となる。さらに, $\vec{v}_{n+2} = \vec{v}_{n+1} + \vec{v}_n$ に $n=1$ を代入すると,

$$\begin{aligned}\vec{v}_3 &= \vec{v}_2 + \vec{v}_1 \\ &= (2, 1)\end{aligned}$$

$$\therefore x_3 = 2, y_3 = 1$$

となる。ここで, (*) に $n=1, 2$ を代入すると,

$$\begin{cases} x_2 = ax_1 + by_1 \\ y_2 = cx_1 + dy_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ c = 1 \end{cases} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\begin{cases} x_3 = ax_2 + by_2 \\ y_3 = cx_2 + dy_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 2 \\ c + d = 1 \end{cases} \quad \dots \textcircled{2}$$

が得られるので, ①②より,

$$a = 1, b = 1, c = 1, d = 0$$

である。

(答) $a = 1, b = 1, c = 1, d = 0$

(2)

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + y_n \\ y_{n+1} = x_n \end{cases} \quad \dots (*)$$

がすべての自然数 n に対して成り立つことを数学的帰納法によって証明する。

[1] $n=1$ のとき

$$x_2 = 1, y_2 = 1$$

であり,

$$x_1 + y_1 = 1, x_1 = 1$$

より, (*) は成り立つ。

[2] $n=k$ (k は自然数) で成り立つと仮定する。このとき,

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + y_k \\ y_{k+1} = x_k \end{cases}$$

である。また, $\vec{v}_{n+2} = \vec{v}_{n+1} + \vec{v}_n$ より,

$$\begin{cases} x_{n+2} = x_{n+1} + x_n \\ y_{n+2} = y_{n+1} + y_n \end{cases}$$

であるので,

$$\begin{aligned}x_{k+2} &= x_{k+1} + x_k \\ &= x_{k+1} + y_{k+1} \\ y_{k+2} &= y_{k+1} + y_k \\ &= y_{k+1} + x_{k+1} - x_k \\ &= x_{k+1}\end{aligned}$$

となる。よって $n=k+1$ でも (*) は成り立つ。

以上, [1], [2] より, すべての自然数 n に対して (*) が成り立つ。

【解答】

(1)	$a = \frac{1}{9} \quad b = -\frac{1}{9} \quad c = \frac{7}{9}$
(2)	$3^n - 2^n$

【解説】

(1)

$$\begin{aligned} P(3x+2) &= a(3x+2)^2 + b(3x+2) + c \\ &= 9ax^2 + (12a+3b)x + 4a+2b+c \end{aligned}$$

であるので、 $P(x) = x^2 + x + 1$ と係数を比較して、

$$\begin{cases} 9a = 1 \\ 12a + 3b = 1 \\ 4a + 2b + c = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{9} \\ b = -\frac{1}{9} \\ c = \frac{7}{9} \end{cases}$$

となる。

(2)

$a_{n+1} = 2a_n + 3^n$ の両辺を 3^{n+1} で割ると、

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{a_n}{3^n} + \frac{1}{3}$$

となる。ここで、 $b_n = \frac{a_n}{3^n}$ とおくと、

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \frac{2}{3}b_n + \frac{1}{3} \\ \Leftrightarrow b_{n+1} - 1 &= \frac{2}{3}(b_n - 1) \\ b_1 - 1 &= \frac{a_1}{3} - 1 \\ &= \frac{1}{3} - 1 \\ &= -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

であるので、数列 $\{b_n - 1\}$ は、初項 $-\frac{2}{3}$ 、公比 $\frac{2}{3}$ の等比数列となる。したがって、

$$\begin{aligned} b_n - 1 &= -\frac{2}{3} \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1} \\ \Leftrightarrow b_n &= 1 - \left(\frac{2}{3} \right)^n \\ \Leftrightarrow a_n &= 3^n - 2^n \end{aligned}$$

である。

(1)

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - \frac{-8x^2 + 24}{(x^2 + 3)^2} \\ &= \frac{x^4 + 14x^2 - 15}{(x^2 + 3)^2} \\ &= \frac{(x^2 + 15)(x + 1)(x - 1)}{(x^2 + 3)^2} \end{aligned}$$

であるから、 $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

よって $f(x)$ は $x = -1$ のとき極大値 $f(-1) = 1$ 、 $x = 1$ のとき極小値 $f(1) = -1$ をとる。

(答) 極大値 1 ($x = -1$)
 極小値 -1 ($x = 1$)

(2)

(1)より、

$$f'(3) = \frac{4}{3}$$

であるので、点 $(3, 1)$ における $y = f(x)$ の接線の方程式は、

$$\begin{aligned} y - 1 &= f'(3)(x - 3) \\ \Leftrightarrow y &= \frac{4}{3}x - 3 \end{aligned}$$

である。

(答) $y = \frac{4}{3}x - 3$

(3)

接点の座標を $(t, f(t))$ とおくと、この点における接線の方程式は、

$$y = f'(t)(x - t) + f(t)$$

である。これが点 $(0, a)$ を通るから

$$\begin{aligned} a &= -tf'(t) + f(t) \\ \Leftrightarrow a &= -t \left(1 - \frac{-8t^2 + 24}{(t^2 + 3)^2} \right) + t - \frac{8t}{t^2 + 3} \\ \Leftrightarrow a &= -\frac{16t^3}{(t^2 + 3)^2} \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$g(x) = -\frac{16x^3}{(x^2 + 3)^2}$$

とおくと、求める a の範囲は、 $y = g(x)$ と $y = a$ が共有点をもつような a の範囲である。よって、

$$g'(x) = \frac{16x^2(x+3)(x-3)}{(x^2+3)^2}$$

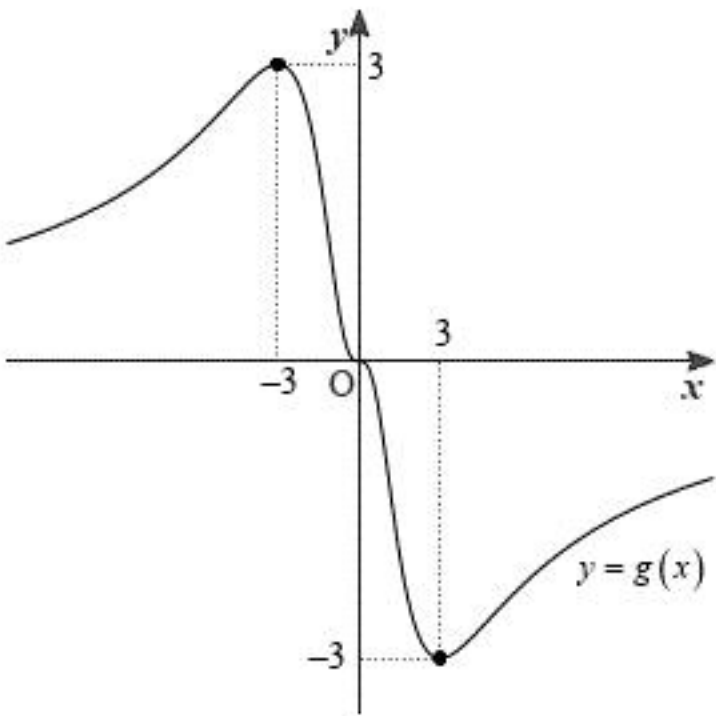
であるから、増減表は以下のようになる。

x	...	-3	...	0	...	3	...
$g'(x)$	+	0	-	0	-	0	+
$g(x)$	↗	極大	↘		↘	極小	↗

また

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} -\frac{16x^3}{(x^2 + 3)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} -\frac{\frac{16}{x}}{\left(1 + \frac{3}{x^2}\right)^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

であり、 $g(-3) = 3$ 、 $g(3) = -3$ であるから、 $y = g(x)$ を図示すると下図のようになる。



したがって、 $y = g(x)$ と $y = a$ が共有点をもつような a の範囲は、

$$-3 \leq a \leq 3$$

である。

(答) $-3 \leq a \leq 3$