

【解答】

(1)	$3a^2 - a + 1$	
(2)	S の最小値	$\frac{11}{12}$
	最小値を与える a	$\frac{1}{6}$

【解説】

(1)

$$\begin{aligned}(x^2 + 1) - \{1 - 2(x - 1)^2\} &= 3x^2 - 4x + 2 \\ &= 3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}\end{aligned}$$

より、放物線 C_1 と C_2 は共有点を持たず、 C_1 の方が C_2 よりも上にある。ゆえに、 S は、

$$\begin{aligned}S &= \int_a^{a+1} \left[(x^2 + 1) - \{1 - 2(x - 1)^2\} \right] dx \\ &= \int_a^{a+1} (3x^2 - 4x + 2) dx \\ &= \left[x^3 - 2x^2 + 2x \right]_a^{a+1} \\ &= 3a^2 - a + 1\end{aligned}$$

である。

(2)

$$\begin{aligned}S &= 3a^2 - a + 1 \\ &= 3\left(a - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{11}{12}\end{aligned}$$

となるから、 S は $a = \frac{1}{6}$ のとき最小値 $\frac{11}{12}$ をとる。

$a \neq 0$ より,

$$\begin{aligned}\frac{a}{x+1} - \frac{1}{a(x-1)} &= 2a \\ \Leftrightarrow \frac{(a^2-1)x - a^2 - 1}{a(x^2-1)} &= 2a \\ \Leftrightarrow \begin{cases} (a^2-1)x - a^2 - 1 = 2a^2(x^2-1) \\ x \neq \pm 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2x^2 - (a^2-1)x - a^2 + 1 = 0 \\ x \neq \pm 1 \end{cases}\end{aligned}$$

となるから、2次方程式 $2a^2x^2 - (a^2-1)x - a^2 + 1 = 0$ が $x = \pm 1$ 以外で実数解を持つような a の

範囲を求めればよい。ここで、この2次方程式に $x=1$ を代入すると、

$$\begin{aligned}2a^2 - (a^2-1) - a^2 + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow 2 &= 0\end{aligned}$$

となり、不適である。また、 $x=-1$ を代入すると、

$$\begin{aligned}2a^2 + (a^2-1) - a^2 + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow 2a^2 &= 0\end{aligned}$$

となり、 $a \neq 0$ に反し、不適である。したがって、この2次方程式は $x = \pm 1$ が解となることはない。この2次方程式の判別式を D とおくと、

$$\begin{aligned}D &= (a^2-1)^2 - 4 \cdot 2a^2(-a^2+1) \\ &= 9a^4 - 10a^2 + 1 \\ &= (9a^2-1)(a^2-1) \\ &= 9\left(a-\frac{1}{3}\right)\left(a+\frac{1}{3}\right)(a-1)(a+1)\end{aligned}$$

であり、実数解を持つ条件は $D \geq 0$ であるから、求める a の範囲は、

$$\begin{aligned}D &\geq 0 \\ \Leftrightarrow 9\left(a-\frac{1}{3}\right)\left(a+\frac{1}{3}\right)(a-1)(a+1) &\geq 0 \\ \therefore a &\leq -1, \quad -\frac{1}{3} \leq a < 0, \quad 0 < a \leq \frac{1}{3}, \quad 1 \leq a \quad (\because a \neq 0)\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a \leq -1, \quad -\frac{1}{3} \leq a < 0, \quad 0 < a \leq \frac{1}{3}, \quad 1 \leq a$$

【解答】

(1)	$a = \frac{3}{2}$	$b = -\frac{1}{2}$	
(2)	$p = \frac{1}{2}$	$q = 1$	$r = -\frac{1}{2}$

【解説】

(1)

$$f_6(x) = af_4(x) + b \quad \cdots \textcircled{1}$$

に $x=0, \frac{\pi}{4}$ を代入すると,

$$\begin{cases} 1 = a + b \\ \frac{1}{4} = \frac{1}{2}a + b \end{cases}$$

が成り立ち、この連立方程式を解くと、 $a = \frac{3}{2}, b = -\frac{1}{2}$ が得られる。これがすべての実数 x に対して①が成立するための必要条件となる。逆にこのとき、①が成立することを示す。ここで、

$$t = \sin x + \cos x$$

とおくと、

$$\begin{aligned} \sin x \cos x &= \frac{(\sin x + \cos x)^2 - (\sin^2 x + \cos^2 x)}{2} \\ &= \frac{t^2 - 1}{2} \end{aligned}$$

となるから、 t を用いて $f_4(x), f_6(x)$ は、

$$\begin{aligned} f_4(x) &= \sin^4 x + \cos^4 x \\ &= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x \\ &= 1 - 2\left(\frac{t^2 - 1}{2}\right)^2 \\ &= -\frac{1}{2}t^4 + t^2 + \frac{1}{2} \\ f_6(x) &= \sin^6 x + \cos^6 x \\ &= (\sin^4 x - \sin^2 \cos^2 x + \cos^4 x)(\sin^2 x + \cos^2 x) \\ &= \left(-\frac{1}{2}t^4 + t^2 + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{t^2 - 1}{2}\right)^2 \\ &= -\frac{3}{4}t^4 + \frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

と表せる。よって、

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}f_4(x) - \frac{1}{2} &= \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}t^4 + t^2 + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \\ &= -\frac{3}{4}t^4 + \frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{4} \\ &= f_6(x) \end{aligned}$$

が成り立つ。以上より、 $a = \frac{3}{2}, b = -\frac{1}{2}$ である。

(2)

$$f_8(x) = pf_4(x)^2 + qf_4(x) + r \quad \cdots \textcircled{2}$$

に $x=0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}$ を代入すると、

$$\begin{cases} 1 = p + q + r \\ \frac{1}{8} = \frac{1}{4}p + \frac{1}{2}q + r \\ \frac{41}{128} = \frac{25}{64}p + \frac{5}{8}q + r \end{cases}$$

が成り立ち、この連立方程式を解くと、 $p = \frac{1}{2}, q = 1, r = -\frac{1}{2}$ が得られる。これがすべての実数 x に対して②が成立するための必要条件となる。逆にこのとき、②が成立することを示す。(1)と同様に、 t を用いて $f_8(x)$ を表すと、

$$\begin{aligned} f_8(x) &= \sin^8 x + \cos^8 x \\ &= (\sin^4 x + \cos^4 x)^2 - 2\sin^4 x \cos^4 x \\ &= \left(-\frac{1}{2}t^4 + t^2 + \frac{1}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{t^2 - 1}{2}\right)^4 \\ &= \left(\frac{1}{4}t^8 - t^6 + \frac{1}{2}t^4 + t^2 + \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{1}{8}t^8 - \frac{1}{2}t^6 + \frac{3}{4}t^4 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{8}\right) \\ &= \frac{1}{8}t^8 - \frac{1}{2}t^6 - \frac{1}{4}t^4 + \frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{8} \end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}f_4(x)^2 + f_4(x) - \frac{1}{2} &= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}t^4 + t^2 + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}t^4 + t^2 + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}t^8 - t^6 + \frac{1}{2}t^4 + t^2 + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2}t^4 + t^2 \\ &= \frac{1}{8}t^8 - \frac{1}{2}t^6 - \frac{1}{4}t^4 + \frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{8} \\ &= f_8(x) \end{aligned}$$

が成り立つ。以上より、 $p = \frac{1}{2}, q = 1, r = -\frac{1}{2}$ となる。

3つのさいころを A, B, C と区別する。以下、出た目の最大値 M によって場合分けする。

[1] $M=1$ のとき

$S \geq 3$ より、 $S < 2M$ となる目の出方は0通りである。

[2] $M=2$ のとき

$S \geq 4$ より、 $S < 2M$ となる目の出方は0通りである。

[3] $M=3$ のとき

$S < 2M$ となるような A, B, C の目の組み合わせは、

$$(1, 1, 3)$$

の1通りある。 A, B, C の区別を考慮すると、目の出方は3通りある。

[4] $M=4$ のとき

$S < 2M$ となるような A, B, C の目の組み合わせは、

$$(1, 1, 4), (1, 2, 4)$$

の2通りある。 A, B, C の区別を考慮すると、目の出方は

$$3+6=9$$

通りある。

[5] $M=5$ のとき

$S < 2M$ となるような A, B, C の目の組み合わせは、

$$(1, 1, 5), (1, 2, 5), (1, 3, 5), (2, 2, 5)$$

の4通りある。 A, B, C の区別を考慮すると、目の出方は

$$3+6+6+3=18$$

通りある。

[6] $M=6$ のとき

$S < 2M$ となるような A, B, C の目の組み合わせは、

$$(1, 1, 6), (1, 2, 6), (1, 3, 6), (1, 4, 6), (2, 2, 6), (2, 3, 6)$$

の6通りある。 A, B, C の区別を考慮すると、目の出方は

$$3+6+6+6+3+6=30$$

通りある。

以上、[1]から[6]より、 $S < 2M$ となる場合の数は、

$$3+9+18+30=60$$

通りある。ここで、全ての A, B, C の目の出方 $6^3 = 216$ 通りは同様に確からしいから、求める確率は、

$$\frac{60}{216} = \frac{5}{18}$$

となる。

(答) $\frac{5}{18}$