

〔解答〕

(1)	$-\frac{100}{3}$
(2)	$a_n = \frac{3n^2 - 3n + 2}{2n}$

〔解説〕

(1)

解と係数の関係より $\alpha + \beta = 4$, $\alpha\beta = -3$ であるから

$$\begin{aligned}
 \frac{\beta^2}{\alpha} + \frac{\alpha^2}{\beta} &= \frac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha\beta} \\
 &= \frac{(\alpha + \beta)\{(\alpha + \beta)^2 - 3\alpha\beta\}}{\alpha\beta} \\
 &= \frac{4 \cdot (4^2 + 9)}{-3} \\
 &= -\frac{100}{3}
 \end{aligned}$$

である。

(2)

$$\begin{aligned}
 \left(1 + \frac{1}{n}\right)a_{n+1} &= a_n + 3 \\
 \Leftrightarrow (n+1)a_{n+1} - na_n &= 3n
 \end{aligned}$$

である。よって $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned}
 na_n &= 1 \cdot a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 3k \\
 &= 1 + 3 \cdot \frac{n(n-1)}{2} \\
 &= \frac{3n^2 - 3n + 2}{2}
 \end{aligned}$$

となる。これは $n=1$ でも成り立つから、すべての自然数 n に対し

$$a_n = \frac{3n^2 - 3n + 2}{2n}$$

である。

不等式 $x^2 + y^2 < 1$ を満たす点の集合を A 、不等式 $x^2 + x + y^2 + a < 0$ を満たす点の集合を B とおく。与えられた命題は

$$A \subset B \quad \dots \textcircled{1}$$

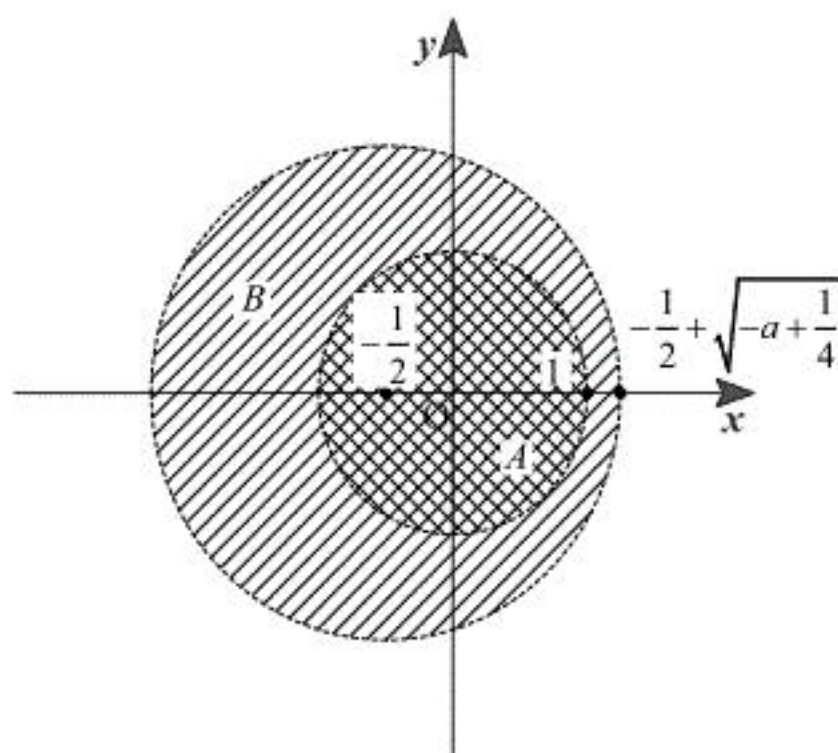
が成り立つことと同値である。ここで

$$\begin{aligned} x^2 + x + y^2 + a &< 0 \\ \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 &< -a + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

であるから、 $a \geq \frac{1}{4}$ のとき B は空集合であり、条件を満たさない。よって

$$a < \frac{1}{4} \quad \dots \textcircled{2}$$

が必要である。このとき xy 平面上で A は中心 $(0, 0)$ 、半径 1 の円の内部を表し、 B は中心 $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ 、半径 $\sqrt{-a + \frac{1}{4}}$ の円の内部を表す。よって A, B を図示すると以下のようになる。



図より、 $\textcircled{1}$ は

$$-\frac{1}{2} + \sqrt{-a + \frac{1}{4}} \geq 1$$

と同値である。これを变形すると

$$\begin{aligned} \sqrt{-a + \frac{1}{4}} &\geq \frac{3}{2} \\ \Leftrightarrow -a + \frac{1}{4} &\geq \frac{9}{4} \\ \Leftrightarrow a &\leq -2 \end{aligned}$$

である。これは $\textcircled{2}$ を満たすから、命題が真であるような実数 a の範囲は

$$a \leq -2$$

である。

〔解答〕

$$\frac{64}{81}$$

〔解説〕

さいころを1回投げるとき A さんが1点獲得する確率は $\frac{2}{3}$ 、B さんが1点獲得する確率は $\frac{1}{3}$ で

あり、各回は独立である。A さんが勝つ場合についてさいころを投げる回数で場合分けする。

[1] さいころを3回投げるとき

A さんが勝つのは3回とも A さんが1点獲得する場合であり、求める確率は

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$$

である。

[2] さいころを4回投げるとき

A さんが勝つのは最初の3回で A さんが2点獲得、B さんが1点獲得し4回目で A さんが1点獲得する場合であり、求める確率は

$${}_3C_2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$$

である。

[3] さいころを5回投げるとき

A さんが勝つのは最初の4回で A さんが2点獲得、B さんが2点獲得し5回目で A さんが1点獲得する場合であり、求める確率は

$${}_4C_2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{16}{81}$$

である。

以上[1], [2], [3]より A さんが勝つ確率は

$$\frac{8}{27} + \frac{8}{27} + \frac{16}{81} = \frac{64}{81}$$

である。

(1)

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \int_0^x (3t^2 + 4t + x) dt \\
 &= \left[t^3 + 2t^2 + xt \right]_0^x \\
 &= x^3 + 3x^2
 \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad f(x) = x^3 + 3x^2$$

(2)

(1)の結果より

$$f'(x) = 3x^2 + 6x = 3x(x+2)$$

であるから、 $-3 \leq x \leq a$ における増減表は以下のようになる。

x	-3	...	-2	...	0	...	a
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	0	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$	$a^3 + 3a^2$

よって $f(x)$ の $-3 \leq x \leq a$ における最大値は $f(-2)$ と $f(a)$ の大きい方である。 $f(x) = f(-2)$ をみだし $x \neq -2$ である x の値を求めると

$$\begin{aligned}
 x^3 + 3x^2 &= 4 \\
 \Leftrightarrow (x+2)^2(x-1) &= 0 \\
 \therefore x &= 1
 \end{aligned}$$

である。 $f(x)$ は $x > 0$ で単調増加だから、

$$0 \leq a < 1 \text{ のとき } f(a) < f(1)$$

$$a \geq 1 \text{ のとき } f(1) \leq f(a)$$

である。 $f(-2) = f(1)$ だから、 $-3 \leq x \leq a$ における $f(x)$ の最大値は、 $0 \leq a < 1$ のとき $f(-2) = 4$ 、 $a \geq 1$ のとき $f(a) = a^3 + 3a^2$ である。

$$\begin{aligned}
 (\text{答}) \quad & 0 \leq a < 1 \text{ のとき最大値 } 4 \\
 & a \geq 1 \text{ のとき最大値 } a^3 + 3a^2
 \end{aligned}$$