

〔解答〕

|     |                |
|-----|----------------|
| (1) | $\frac{15}{4}$ |
| (2) | 18             |

〔解説〕

(1)

$$x^3 - 3x = x(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) \text{ より}$$

$$\begin{cases} x < -\sqrt{3}, 0 < x < \sqrt{3} \text{ のとき} & x^3 - 3x < 0 \\ -\sqrt{3} \leq x \leq 0, \sqrt{3} \leq x \text{ のとき} & x^3 - 3x \geq 0 \end{cases}$$

である。したがって、

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 |x^3 - 3x| dx &= \int_{-1}^0 (x^3 - 3x) dx + \int_0^{\sqrt{3}} \{-(x^3 - 3x)\} dx + \int_{\sqrt{3}}^2 (x^3 - 3x) dx \\ &= \left[ \frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}x^2 \right]_{-1}^0 + \left[ \frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}x^2 \right]_0^{\sqrt{3}} + \left[ \frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}x^2 \right]_{\sqrt{3}}^2 \\ &= -\frac{1}{4} + \frac{3}{2} - \frac{9}{4} + \frac{9}{2} + 4 - 6 - \frac{9}{4} + \frac{9}{2} \\ &= \frac{15}{4} \end{aligned}$$

となる。

(2)

初項が5で公比が1.2の等比数列の初項から第 $n$ 項までの和は

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{5(1-1.2^n)}{1-1.2} \\ &= 25(1.2^n - 1) \end{aligned}$$

であり、 $S_n > 600$  のとき、

$$\begin{aligned} S_n &> 600 \\ \Leftrightarrow 25(1.2^n - 1) &> 600 \\ \Leftrightarrow 1.2^n &> 25 \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

となる。ここで①の両辺の常用対数をとると

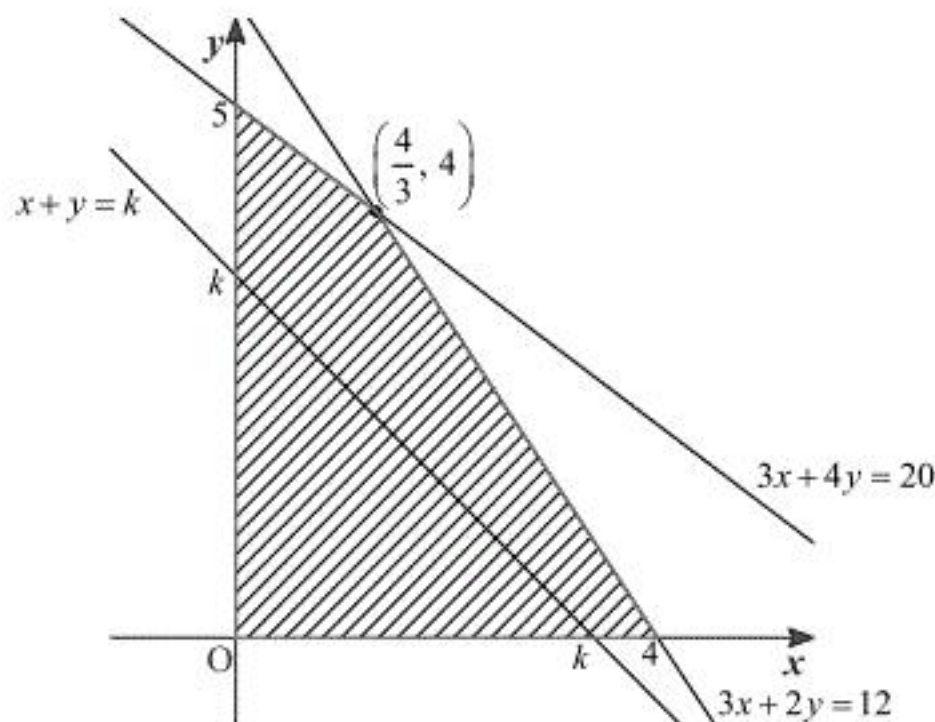
$$\begin{aligned} n \log_{10} 1.2 &> 2 \log_{10} 5 \\ \Leftrightarrow n \log_{10} \frac{2^2 \cdot 3}{10} &> 2(1 - \log_{10} 2) \\ \Leftrightarrow n(2 \cdot 0.301 + 0.477 - 1) &> 2 \cdot 0.699 \quad (\because \log_{10} 2 = 0.301, \log_{10} 3 = 0.477) \\ \Leftrightarrow 0.079n &> 1.398 \\ \Leftrightarrow n &> 17.6 \cdots \end{aligned}$$

となる。したがって、 $S_n > 600$  となる最小の自然数 $n$ は $n=18$ である。

4つの条件

$$\begin{cases} 3x+4y \leq 20 \\ 3x+2y \leq 12 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

で表される  $xy$  平面上の領域を領域  $D$  とする。また  $x+y=k$  とするとこれは直線の方程式とみることができ、これを直線  $l$  とする。領域  $D$  と直線  $l$  が共有点を持つような  $k$  の値の最大値を求めればよい。領域  $D$  と直線  $l$  を図示すると以下のようなになる。ただし領域  $D$  の境界はすべて含む。



3直線  $3x+4y=20$ 、 $3x+2y=12$ 、 $x+y=k$  の傾きがそれぞれ  $-\frac{3}{4}$ 、 $-\frac{3}{2}$ 、 $-1$  であることから、

$k$  が最大となるのは、直線  $l$  が点  $\left(\frac{4}{3}, 4\right)$  を通る場合である。したがってそのときの  $k$  の値は

$$\begin{aligned} k &= \frac{4}{3} + 4 \\ &= \frac{16}{3} \end{aligned}$$

である。

(答) 最大値:  $\frac{16}{3}$ , そのときの  $x, y$  の値:  $(x, y) = \left(\frac{4}{3}, 4\right)$

〔解答〕

|     |                  |
|-----|------------------|
| (1) | $\frac{5}{54}$   |
| (2) | $\frac{5}{216}$  |
| (3) | $\frac{19}{108}$ |

〔解説〕

(1)

以下、大中小のさいころの出た目の組み合わせを順に  $(a, b, c)$  と表すこととする。 $a > b > c$  となる場合、1から6の6個の整数のうちから3つ選び、大きい方から  $a, b, c$  と定めればよい。したがってそのような  $(a, b, c)$  は  ${}_6C_3 = 20$  通りである。 $(a, b, c)$  の組み合わせは全部で  $6^3 = 216$  通り存在し、これらは同様に確からしいから、求める確率は

$$\frac{20}{216} = \frac{5}{54}$$

である。

(2)

$b^2 = 4ac$  となるのは

$$(a, b, c) = (1, 2, 1), (1, 4, 4), (2, 4, 2), (4, 4, 1), (3, 6, 3)$$

の5通りである。したがってその確率は  $\frac{5}{216}$  である。

(3)

$a \geq 1, c \geq 1$  より、 $b^2 > 4ac \geq 4$  である。したがって  $b^2 > 4ac$  であるためには少なくとも  $b \geq 3$  でなければならない。以下、 $b$  の値により場合分けして考える。

[1]  $b = 3$  のとき

$$b^2 > 4ac \Leftrightarrow \frac{9}{4} > ac \text{ となるから、これをみたすのは}$$

$$(a, b, c) = (1, 3, 1), (1, 3, 2), (2, 3, 1)$$

の3通りである。

[2]  $b = 4$  のとき

$$b^2 > 4ac \Leftrightarrow 4 > ac \text{ となるから、これをみたすのは}$$

$$(a, b, c) = (1, 4, 1), (1, 4, 2), (2, 4, 1), (1, 4, 3), (3, 4, 1)$$

の5通りである。

[3]  $b = 5$  のとき

$$b^2 > 4ac \Leftrightarrow \frac{25}{4} > ac \text{ となるから、これをみたすのは}$$

$$(a, b, c) = (1, 5, 1), (1, 5, 2), (1, 5, 3), (1, 5, 4), (1, 5, 5), (1, 5, 6)$$

$$(2, 5, 1), (2, 5, 2), (2, 5, 3), (3, 5, 1), (3, 5, 2)$$

$$(4, 5, 1), (5, 5, 1), (6, 5, 1)$$

の14通りである。

[4]  $b = 6$  のとき

$$b^2 > 4ac \Leftrightarrow 9 > ac \text{ となるから、これをみたすのは}$$

$$(a, b, c) = (1, 6, 1), (1, 6, 2), (1, 6, 3), (1, 6, 4), (1, 6, 5), (1, 6, 6)$$

$$(2, 6, 1), (2, 6, 2), (2, 6, 3), (2, 6, 4), (3, 6, 1), (3, 6, 2)$$

$$(4, 6, 1), (4, 6, 2), (5, 6, 1), (6, 6, 1)$$

の16通りである。

以上[1]～[4]は互いに排反であるから、求める確率は

$$\frac{3+5+14+16}{216} = \frac{19}{108}$$

である。

(1)

放物線  $C$  と直線  $L$  の方程式から  $y$  を消去して連立すると

$$\begin{aligned}(x+a)^2 &= 3x+a^3 \\ \Leftrightarrow x^2 + (2a-3)x - a^3 + a^2 &= 0\end{aligned}$$

となる。この二次方程式の解が放物線  $C$  と直線  $L$  の交点の  $x$  座標である。この二次方程式の判別式を  $D$  とすると

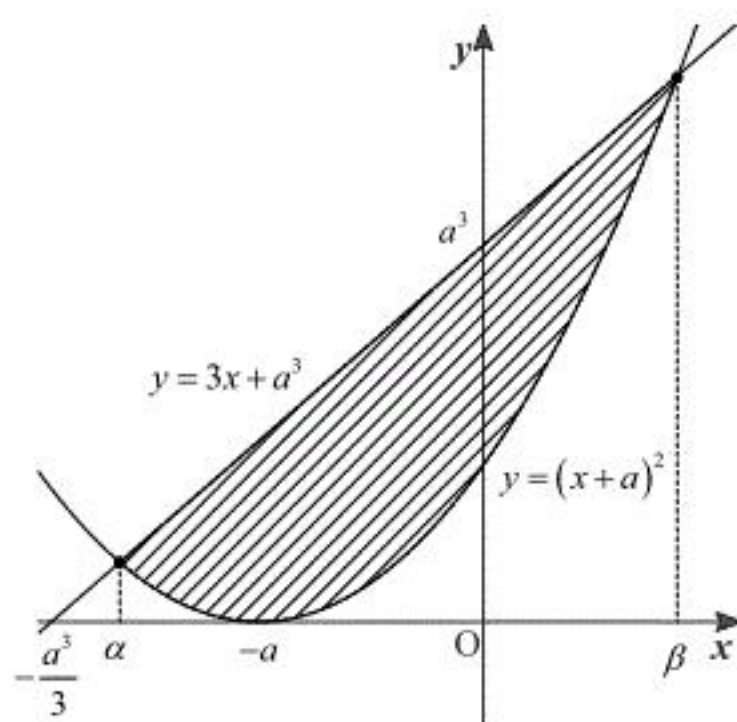
$$\begin{aligned}D &= (2a-3)^2 + 4a^3 - 4a^2 \\ &= 4a^3 - 12a + 9 \\ &= (a+2)(4a^2 - 8a + 4) + 1 \\ &= 4(a+2)(a-1)^2 + 1\end{aligned}$$

となる。ここで上式より  $a \geq -2$  において  $D \geq 1 > 0$  が成立するから、 $C$  と  $L$  は異なる 2 点で交わることが示せた。

(証明終)

(2)

放物線  $C$  と直線  $L$  の異なる 2 交点の  $x$  座標を  $\alpha, \beta$  ( $\alpha < \beta$ ) とする。このとき、放物線  $C$  と直線  $L$  を図示すると以下ようになる。



$C$  と  $L$  で囲まれた部分の面積は上図の斜線部の面積である。これを  $S(a)$  とすると

$$\begin{aligned}S(a) &= \int_{\alpha}^{\beta} \{3x + a^3 - (x+a)^2\} dx \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} -\{x^2 + (2a-3)x - a^3 + a^2\} dx\end{aligned}$$

となる。 $\alpha, \beta$  は  $x^2 + (2a-3)x - a^3 + a^2 = 0$  の異なる 2 つの実数解であるから

$$x^2 + (2a-3)x - a^3 + a^2 = (x-\alpha)(x-\beta)$$

が成立する。また、解と係数の関係より

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -2a + 3 \\ \alpha\beta = -a^3 + a^2 \end{cases}$$

が成立する。以上の式から

$$\begin{aligned}S(a) &= \int_{\alpha}^{\beta} -(x-\alpha)(x-\beta) dx \\ &= \frac{(\beta-\alpha)^3}{6} \\ &= \frac{\left(\sqrt{(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta}\right)^3}{6} \quad (\because \beta > \alpha) \\ &= \frac{\left(\sqrt{4a^3 - 12a + 9}\right)^3}{6}\end{aligned}$$

となる。ここで  $f(a) = 4a^3 - 12a + 9$  とおくと、

$$\begin{aligned}f'(a) &= 12a^2 - 12 \\ &= 12(a+1)(a-1)\end{aligned}$$

であり、 $a \geq -2$  における  $f(a)$  の増減表をかくと以下ようになる。

|         |        |            |         |            |        |            |
|---------|--------|------------|---------|------------|--------|------------|
| $a$     | -2     | ...        | -1      | ...        | 1      | ...        |
| $f'(a)$ |        | +          | 0       | -          | 0      | +          |
| $f(a)$  | $f(2)$ | $\nearrow$ | $f(-1)$ | $\searrow$ | $f(1)$ | $\nearrow$ |

増減表より、 $a = -1$  のとき  $f(a)$  は極大値をとる。また、このとき  $S(a)$  も極大値をとり、その値は、

$$S(a) = \frac{\left\{\sqrt{f(-1)}\right\}^3}{6} = \frac{17\sqrt{17}}{6}$$

である。

(答) 極大値:  $\frac{17\sqrt{17}}{6}$ , そのときの  $a$  の値:  $a = -1$