

〔解答〕

$$a = -2, b = -3, c = -1$$

〔解説〕

α, β, γ を解に持つ3次方程式は $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=0$ と表せ、これを展開すると

$$\begin{aligned}(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) &= 0 \\ \Leftrightarrow x^3 - (\alpha + \beta + \gamma)x^2 + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)x - \alpha\beta\gamma &= 0\end{aligned}$$

となる。この式と $x^3 - 2x^2 + x - 1 = 0$ が一致することから係数を比較して

$$\begin{cases} -(\alpha + \beta + \gamma) = -2 & \dots \textcircled{1} \\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 1 & \dots \textcircled{2} \\ -\alpha\beta\gamma = -1 & \dots \textcircled{3} \end{cases}$$

が得られる。同様にして $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$ を解に持つ3次方程式は $(x-\alpha^2)(x-\beta^2)(x-\gamma^2)=0$ と表

せ、これを展開すると

$$\begin{aligned}(x-\alpha^2)(x-\beta^2)(x-\gamma^2) &= 0 \\ \Leftrightarrow x^3 - (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)x^2 + (\alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2)x - \alpha^2\beta^2\gamma^2 &= 0\end{aligned}$$

となる。この式と $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ が一致することから係数を比較して

$$\begin{cases} -(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = a & \dots \textcircled{4} \\ \alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 = b & \dots \textcircled{5} \\ -\alpha^2\beta^2\gamma^2 = c & \dots \textcircled{6} \end{cases}$$

が得られる。ここで $\textcircled{1}^2 - 2 \times \textcircled{2}$ を計算すると

$$\begin{aligned}(a + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) &= (-2)^2 - 2 \cdot 1 \\ \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= 2\end{aligned}$$

が得られる。したがって $\textcircled{4}$ より、 $a = -2$ となる。また、 $\textcircled{2}^2 - 2 \times \textcircled{3} \times \textcircled{1}$ を計算すると

$$\begin{aligned}(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)^2 - 2 \cdot (-\alpha\beta\gamma) \cdot \{-(\alpha + \beta + \gamma)\} &= 1^2 - 2 \cdot (-1) \cdot (-2) \\ \Leftrightarrow \alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 &= -3\end{aligned}$$

が得られる。したがって $\textcircled{5}$ より、 $b = -3$ となる。また、 $\textcircled{3}^2$ を計算すると

$$\begin{aligned}(-\alpha\beta\gamma)^2 &= (-1)^2 \\ \Leftrightarrow \alpha^2\beta^2\gamma^2 &= 1\end{aligned}$$

が得られる。したがって $\textcircled{6}$ より、 $c = -1$ となる。

(1)

$\triangle ABC$ において正弦定理より

$$\begin{aligned}\frac{AB}{\sin \angle ACB} &= 2 \cdot 9 \\ \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{6}}{\sin \alpha} &= 18 \\ \therefore \sin \alpha &= \frac{\sqrt{6}}{6}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{\sqrt{6}}{6}$$

(2)

$\triangle ABC$ は $AB=BC$, $\angle ACB=\alpha$ の2等辺三角形であるから, $\angle ABC=\pi-2\alpha$ と表すことができる。 $\triangle ABC$ において正弦定理より

$$\begin{aligned}\frac{AC}{\sin \angle ABC} &= 2 \cdot 9 \\ \Leftrightarrow AC &= 18 \sin(\pi-2\alpha) \\ \Leftrightarrow AC &= 18 \sin 2\alpha\end{aligned}$$

となる。ここで, $\sin \alpha = \frac{\sqrt{6}}{6}$ かつ, $\triangle ABC$ が2等辺三角形であることから $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ より,

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{30}}{6}\end{aligned}$$

が得られる。したがって,

$$\begin{aligned}AC &= 18 \sin 2\alpha \\ &= 18 \cdot 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ &= 18 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{6}}{6} \cdot \frac{\sqrt{30}}{6} \\ &= 6\sqrt{5}\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad 6\sqrt{5}$$

(3)

円の中心をOとすると $\triangle AOC$ において余弦定理より,

$$\cos \angle AOC = \frac{9^2 + 9^2 - (6\sqrt{5})^2}{2 \cdot 9 \cdot 9} = -\frac{1}{9}$$

となる。ここで, $\triangle AED$ は $AE=ED$, $\angle ADE=\alpha$ の2等辺三角形であるから, $\triangle ABC$ と $\triangle AED$ は合同であり, $\angle AOD=\angle AOC$ である。また, $0 < \angle AOC < \pi$ で $\cos \angle AOC < 0$ より,

$\frac{\pi}{2} < \angle AOC < \pi$ であるから, 円の中心Oが5角形の内側にあることがわかる。したがって,

$\angle AOC = \beta$ とすると, (ただし, $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ である。)

$$\begin{aligned}\cos \angle COD &= \cos(2\pi - 2\beta) \\ &= \cos 2\beta \\ &= 2\cos^2 \beta - 1 \\ &= -\frac{79}{81}\end{aligned}$$

となる。以上より, $\triangle COD$ において余弦定理を用いると, CDの長さは

$$\begin{aligned}CD^2 &= CO^2 + DO^2 - 2CO \cdot DO \cos \angle COD \\ &= 9^2 + 9^2 - 2 \cdot 9 \cdot 9 \cdot \cos \angle COD \\ &= 320 \\ \therefore CD &= 8\sqrt{5} \quad (CD > 0)\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad 8\sqrt{5}$$

【解答】

(1)	$y = \frac{7}{3}x - \frac{4}{9}$
(2)	$\frac{2}{3}$
(3)	$-\frac{1}{3}$
(4)	$\frac{41}{27}$

【解説】

(1)

$f(x) = x^2 + x$, $g(x) = 4x^2 + 5x$ とする。 s, t を実数とし、 C_1 に $x = t$ で接する接線を ℓ_1 、 C_2 に $x = s$ で接する接線を ℓ_2 として、それぞれの直線の式を求める。 $f'(t) = 2t + 1$ より、 ℓ_1 の式は

$$y - (t^2 + t) = (2t + 1)(x - t)$$

$$\Leftrightarrow y = (2t + 1)x - t^2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

と表される。同様に $g'(s) = 8s + 5$ より、 ℓ_2 の式は

$$y - (4s^2 + 5s) = (8s + 5)(x - s)$$

$$\Leftrightarrow y = (8s + 5)x - 4s^2 \quad \cdots \textcircled{2}$$

と表される。 ℓ_1, ℓ_2 が一致するとき、 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ より係数を比較して

$$\begin{cases} 2t + 1 = 8s + 5 & \cdots \textcircled{3} \\ -t^2 = -4s^2 & \cdots \textcircled{4} \end{cases}$$

であり、 $\textcircled{4}$ より $t = \pm 2s$ となる。以下、 t, s の関係で場合分けして考える。

[1] $t = 2s$ のとき

$\textcircled{3}$ より $t = -2, s = -1$ となるから L の方程式は $y = -3x - 1$ となる。このとき傾きが負となるため、不適である。

[2] $t = -2s$ のとき

$\textcircled{3}$ より $t = \frac{2}{3}, s = -\frac{1}{3}$ となるから L の方程式は $y = \frac{7}{3}x - \frac{4}{9}$ となる。このとき傾きは正であり、条件を満たす。

以上[1], [2]より L の方程式は $y = \frac{7}{3}x - \frac{4}{9}$ となる。

(2)

(1)より L と C_1 の接点の x 座標は $x = t = \frac{2}{3}$ となる。

(3)

(1)より L と C_2 の接点の x 座標は $x = s = -\frac{1}{3}$ となる。

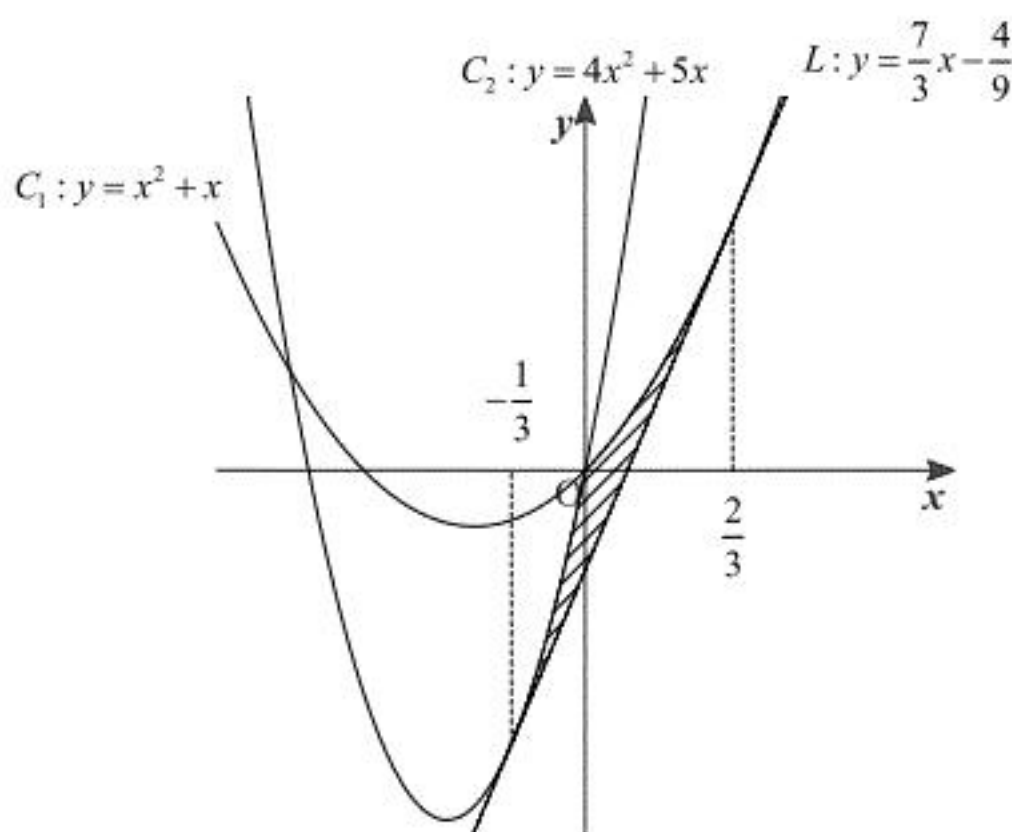
(4)

C_1, C_2 の交点の x 座標は

$$x^2 + x = 4x^2 + 5x$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{4}{3}, 0$$

となる。 L, C_1, C_2 を図示すると、以下のようになる。



したがって、囲まれた領域の面積は

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{2}{3}} \left\{ (4x^2 + 5x) - \left(\frac{7}{3}x - \frac{4}{9} \right) \right\} dx + \int_{-\frac{1}{3}}^0 \left\{ (x^2 + x) - \left(\frac{7}{3}x - \frac{4}{9} \right) \right\} dx \\ &= \left[\frac{4}{3}x^3 + \frac{4}{3}x^2 + \frac{4}{9}x \right]_0^{\frac{2}{3}} + \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{9}x \right]_{-\frac{1}{3}}^0 \\ &= \frac{104}{81} + \frac{19}{81} \\ &= \frac{41}{27} \end{aligned}$$

となる。

$f(x) = 3x^4 - 4(a-1)x^3 - 6ax^2$ とすると、

$$\begin{aligned} f'(x) &= 12x^3 - 12(a-1)x^2 - 12ax \\ &= 12x(x-a)(x+1) \end{aligned}$$

となる。したがって、 $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1, 0, a$ となる。以下、 a の値の範囲で場合分けする。

[1] $a < -1$ のとき

増減表は

x	...	a	...	-1	...	0	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	$-a^4 - 2a^3$	$\nearrow$	$-2a - 1$	$\searrow$	0	$\nearrow$

となる。最小値をとる x の値がちょうど2つ存在するとき、 $-a^4 - 2a^3 = 0 \Leftrightarrow a = 0, -2$ となる必要がある。 $a < -1$ より $a = -2$ であり、これは題意を満たす。

[2] $-1 \leq a \leq 0$ のとき

増減表は

x	...	-1	...	a	...	0	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	$-2a - 1$	$\nearrow$	$-a^4 - 2a^3$	$\searrow$	0	$\nearrow$

となる。最小値をとる x の値がちょうど2つ存在するとき、 $-2a - 1 = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}$ となる

必要がある。これは $-1 \leq a \leq 0$ を満たし、題意を満たす。

[3] $0 < a$ のとき

増減表は

x	...	-1	...	0	...	a	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	$-2a - 1$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-a^4 - 2a^3$	$\nearrow$

となる。最小値をとる x の値がちょうど2つ存在するとき、 $-a^4 - 2a^3 = -2a - 1$ となる必要がある。この式を満たすような a は

$$\begin{aligned} -a^4 - 2a^3 &= -2a - 1 \\ \Leftrightarrow a^4 + 2a^3 - 2a - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (a^2 - 1)\{(a^2 + 1) + 2a\} &= 0 \\ \Leftrightarrow (a - 1)(a + 1)^3 &= 0 \\ \Leftrightarrow a &= -1, 1 \end{aligned}$$

である。 $0 < a$ より $a = 1$ であり、これは題意を満たす。

以上[1], [2], [3]より最小値をとる x の値がちょうど2つ存在するような a の値は $a = -2, -\frac{1}{2}, 1$

となる。

(答) $a = -2, -\frac{1}{2}, 1$