

〔解答〕

(1)	$\frac{3}{2} \leq x < 5$
(2)	$2\sqrt{2} - 2$

〔解説〕

(1)

まず、根号内の値は0以上となる必要があるから、

$$2x^2 + x - 6 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (2x-3)(x+2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \leq -2, \frac{3}{2} \leq x \quad \dots \textcircled{1}$$

が必要である。また、 $0 \leq \sqrt{2x^2 + x - 6}$ であるから

$$0 \leq \sqrt{2x^2 + x - 6} < x + 2$$

$$\therefore -2 < x \quad \dots \textcircled{2}$$

であり、①、②の共通範囲をとると

$$\frac{3}{2} \leq x \quad \dots \textcircled{3}$$

となる。③の範囲で不等式を解くと

$$\sqrt{2x^2 + x - 6} < x + 2$$

$$\Leftrightarrow (2x-3)(x+2) < (x+2)^2 \quad (\because \textcircled{3})$$

$$\Leftrightarrow 2x-3 < x+2 \quad (\because \textcircled{2})$$

$$\therefore x < 5$$

が得られ、③と合わせて

$$\frac{3}{2} \leq x < 5$$

とわかる。

(2)

$$\sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$$

であるから

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \text{ のとき } \sin x - \cos x \leq 0$$

$$\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \text{ のとき } \sin x - \cos x \geq 0$$

とわかる。よって

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin x - \cos x| dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left\{ -\sqrt{2} \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \right\} dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2} \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) dx \\ &= \left[\sqrt{2} \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \left[-\sqrt{2} \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \sqrt{2} - 1 - (1 - \sqrt{2}) \\ &= 2\sqrt{2} - 2 \end{aligned}$$

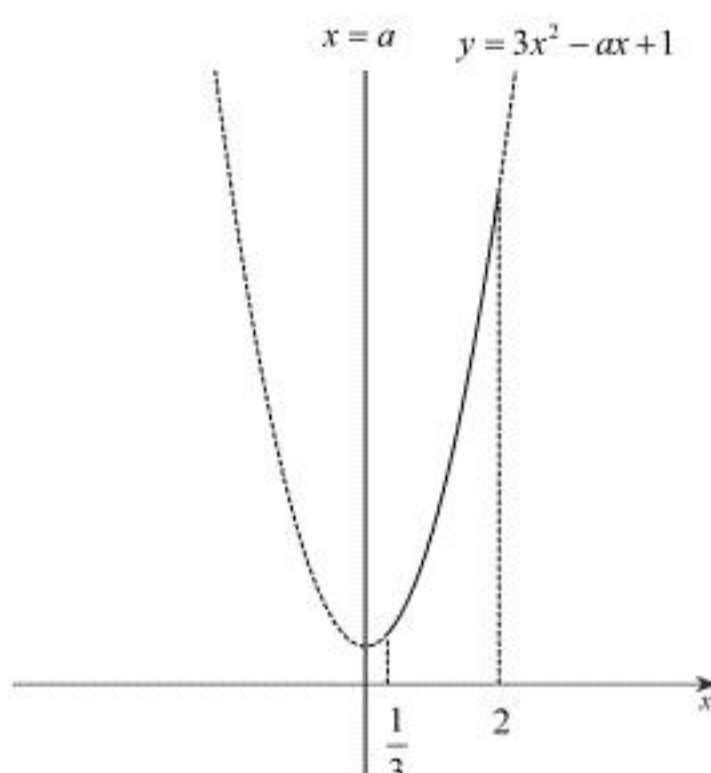
となる。

$f(x) = 3x^2 - ax + 1$ とおくと

$$f(x) = 3x^2 - ax + 1 = 3\left(x - \frac{a}{6}\right)^2 - \frac{a^2}{12} + 1$$

である。以下 $y = f(x)$ のグラフの軸の位置によって場合分けを行う。

[1] $\frac{a}{6} < \frac{1}{3}$, すなわち $a < 2$ のとき



軸の位置と条件の x の範囲の位置関係から、 $f\left(\frac{1}{3}\right) \geq 0$ が成立すればよい。このとき

$$f\left(\frac{1}{3}\right) \geq 0$$

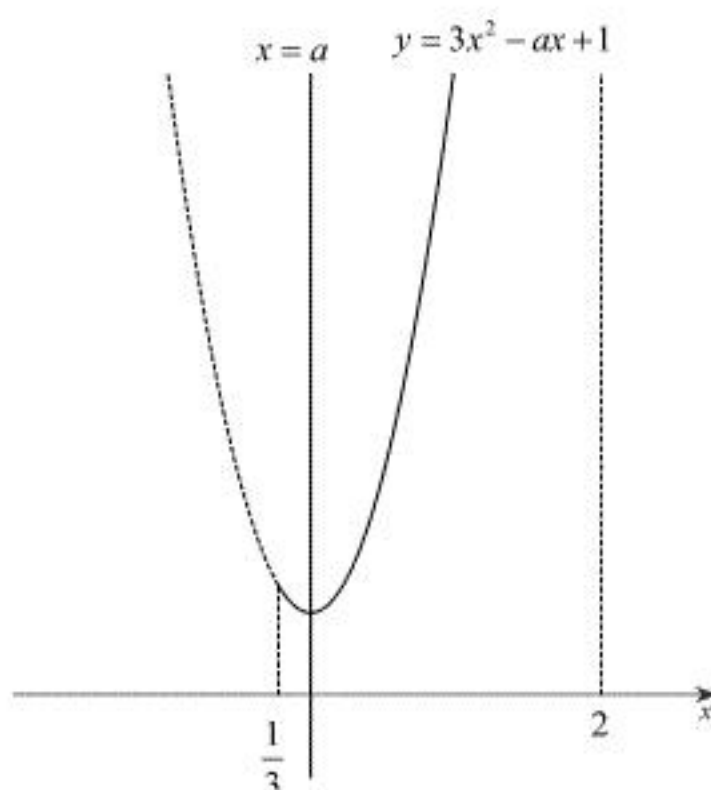
$$\Leftrightarrow 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 - a \cdot \frac{1}{3} + 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{3} \leq \frac{4}{3}$$

$$\therefore a \leq 4$$

であり、 $a < 2$ との共通範囲は $a < 2$ となる。

[2] $\frac{1}{3} \leq \frac{a}{6} < 2$, すなわち $2 \leq a < 12$ のとき



軸の位置と条件の x の範囲の位置関係から、 $f\left(\frac{a}{6}\right) > 0$ が成立すればよい。このとき

$$f\left(\frac{a}{6}\right) > 0$$

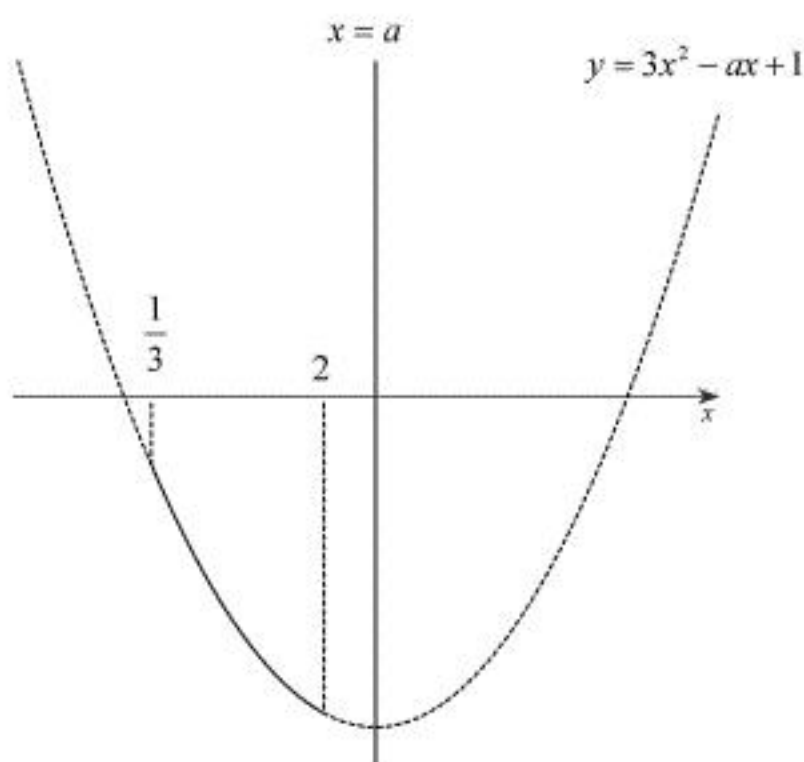
$$\Leftrightarrow -\frac{a^2}{12} + 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 < 12$$

$$\therefore -2\sqrt{3} < a < 2\sqrt{3}$$

であり、 $2 \leq a < 12$ との共通範囲は $2 \leq a < 2\sqrt{3}$ となる。

[3] $2 \leq \frac{a}{6}$, すなわち $12 \leq a$ のとき



軸の位置と条件の x の範囲の位置関係から、 $f(2) \geq 0$ が成立すればよい。このとき

$$f(2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 3 \cdot 2^2 - a \cdot 2 + 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2a \leq 13$$

$$\therefore a \leq \frac{13}{2}$$

であり、 $12 \leq a$ との共通範囲は存在しない。

以上[1], [2], [3]より、求める a の範囲は

$$a < 2\sqrt{3}$$

である。

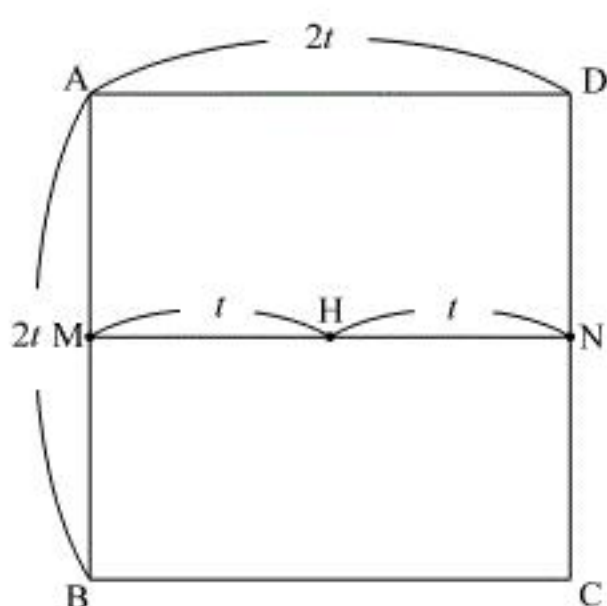
(答) $a < 2\sqrt{3}$

〔解答〕

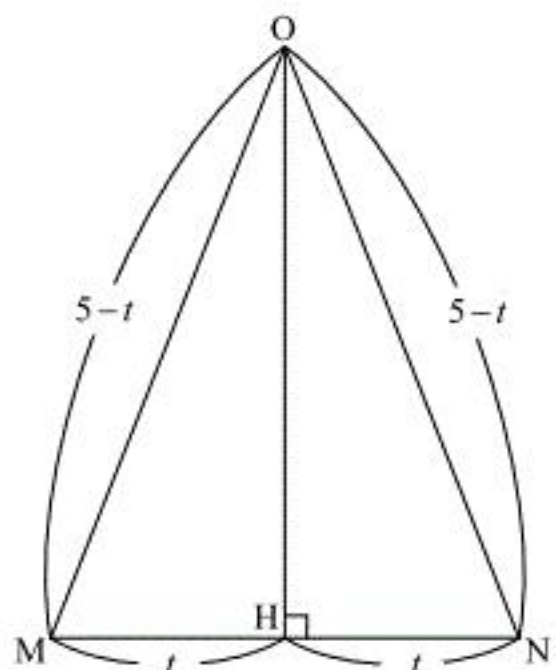
(1)	$V = \frac{4}{3}t^2\sqrt{-10t+25}$	
(2)	最大値	$\frac{16\sqrt{5}}{3}$
	t の値	2

〔解説〕

(1)



正四角錐の頂点を点O、底面を正方形ABCDとする。また、辺AB, CDの中点をそれぞれM, Nとすると、正四角錐の対称性より点Oから底面ABCDに下ろした垂線の足は線分MNの中点と一致する。この点をHとし、 $\triangle OMN$ を考える。



正四角錐OABCDの側面は二等辺三角形であるから、線分OM, ONの長さは側面の二等辺三角形の高さと等しく、 $5-t$ である。よって、 $\triangle OHM$ において三平方の定理より

$$\begin{aligned} OH^2 &= OM^2 - MH^2 \\ &= (5-t)^2 - t^2 \\ &= -10t + 25 \end{aligned}$$

となり、 $OH > 0$, $0 < t < \frac{5}{2}$ より、 $OH = \sqrt{-10t+25}$ であり、これが正四角錐OABCDの高さである。したがって

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \cdot (2t)^2 \cdot \sqrt{-10t+25} \\ &= \frac{4}{3} t^2 \sqrt{-10t+25} \end{aligned}$$

となる。

(2)

$0 < t < \frac{5}{2}$ の範囲では

$$\begin{aligned} V &= \frac{4}{3} t^2 \sqrt{-10t+25} \\ &= \frac{4}{3} \sqrt{-10t^3 + 25t^4} \end{aligned}$$

であり、

$$f(t) = -10t^3 + 25t^4$$

とおくと、 $f(t)$ が最大となるとき V も最大となる。以下、 $f(t)$ が最大値をとる t の値を求める。

$$\begin{aligned} f'(t) &= -30t^2 + 100t^3 \\ &= -50t^2(t-2) \end{aligned}$$

であるから、 $0 < t < \frac{5}{2}$ の範囲における $f(t)$ の増減は下表のようになる。

t	0	...	2	...	$\frac{5}{2}$
$f'(t)$	$\searrow$	+	0	-	$\searrow$
$f(t)$	$\searrow$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	$\searrow$

よって、 $f(t)$ は $t=2$ のとき最大となるから、 V も $t=2$ で最大となり、その値は

$$\begin{aligned} V &= \frac{4}{3} \cdot 2^2 \cdot \sqrt{-10 \cdot 2 + 25} \\ &= \frac{16\sqrt{5}}{3} \end{aligned}$$

である。

$$S_n = 2n^2 + n - a_n \quad \cdots \textcircled{1}$$

①で $n=1, 2$ とすると

$$S_1 = 2 \cdot 1^2 + 1 - a_1$$

$$\Leftrightarrow 2a_1 = 3$$

$$\Leftrightarrow a_1 = \frac{3}{2}$$

$$S_2 = 2 \cdot 2^2 + 2 - a_2$$

$$\Leftrightarrow 2a_2 = 10 - a_1$$

$$\Leftrightarrow a_2 = \frac{17}{4}$$

となる。ここで、 $S_{n+1} - S_n$ より

$$S_{n+1} - S_n = 2(n+1)^2 + (n+1) - a_{n+1} - (2n^2 + n - a_n)$$

$$\Leftrightarrow 2a_{n+1} - a_n = 4n + 3 \quad \cdots \textcircled{2}$$

である。よって

$$2a_{n+2} - a_{n+1} = 4(n+1) + 3 \quad \cdots \textcircled{3}$$

であり、③-②より

$$2(a_{n+2} - a_{n+1}) - (a_{n+1} - a_n) = 4$$

が得られる。 $b_n = a_{n+1} - a_n$ とおくと

$$2b_{n+1} - b_n = 4$$

$$\Leftrightarrow b_{n+1} - 4 = \frac{1}{2}(b_n - 4)$$

であるから、 $\{b_n - 4\}$ は初項 $b_1 - 4 = \frac{17}{4} - \frac{3}{2} - 4 = -\frac{5}{4}$ 、公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列であることがわかる。

よって

$$b_n - 4 = -\frac{5}{4} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow b_n = -\frac{5}{4} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} + 4$$

となる。 $\{b_n\}$ は $\{a_n\}$ の階差数列であるから、 $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \\ &= \frac{3}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ -\frac{5}{4} \left(\frac{1}{2} \right)^{k-1} + 4 \right\} \\ &= \frac{3}{2} - \frac{5}{4} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{2}} + 4(n-1) \\ &= \frac{5}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} + 4n - 5 \end{aligned}$$

であり、 $n=1$ とすると

$$\frac{5}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^0 + 4 - 5 = \frac{3}{2}$$

となり a_1 と一致するので、数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = \frac{5}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} + 4n - 5$$

である。

$$(\text{答}) \quad a_n = \frac{5}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} + 4n - 5$$