

1

〔解答〕

(1)	$-t^2 + 1$
(2)	最大値 $\frac{5}{4}$, 最小値 $-\sqrt{2} - 1$

〔解説〕

(1)

t を 2 乗すると, 三角関数の相互関係 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ と倍角の公式 $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ より,

$$t^2 = \sin^2 x - 2 \sin x \cos x + \cos^2 x$$

$$\Leftrightarrow t^2 = 1 - \sin 2x$$

$$\therefore \sin 2x = -t^2 + 1$$

である。

(2)

(1) より, $\sin 2x + \sin x - \cos x$ を t を用いて表すと,

$$\begin{aligned} \sin 2x + \sin x - \cos x &= (-t^2 + 1) + t \\ &= -t^2 + t + 1 \\ &= -\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4} \end{aligned}$$

である。また,

$$\begin{aligned} t &= \sin x - \cos x \\ &= \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

であり, x が実数全体を動くので,

$$-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$$

である。よって, $\sin 2x + \sin x - \cos x$ は t の 2 次関数として表せるから, $t = \frac{1}{2}$ のときに最大値

$$\frac{5}{4}$$

をとり, $t = -\sqrt{2}$ のときに最小値

$$-\left(-\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4} = -\sqrt{2} - 1$$

をとる。

$f(x) = x^3 + (a+2)x^2 - 4a$ とする。これを x で微分すると、

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 + 2(a+2)x \\ &= 3x \left(x + \frac{2a+4}{3} \right) \end{aligned}$$

であるので、

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 0, -\frac{2a+4}{3} \end{aligned}$$

である。ここで、 $0, -\frac{2a+4}{3}$ の大小に注意して場合分けを行う。

[1] $0 < -\frac{2a+4}{3}$, つまり $a < -2$ のとき

$f(x)$ の増減表は以下の通りである。

x	...	0	...	$-\frac{2a+4}{3}$	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	$f(0)$	$\searrow$	$f\left(-\frac{2a+4}{3}\right)$	$\nearrow$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ であり、 $f(x)$ は連続であるので、増減表より、 $f(x) = 0$ が

ちょうど2つの実数解をもつとき、 $f(0) = 0$ または、 $f\left(-\frac{2a+4}{3}\right) = 0$ である。 $f(0) = 0$ のとき、

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ \Leftrightarrow -4a &= 0 \\ \Leftrightarrow a &= 0 \end{aligned}$$

であるが、 $a < -2$ より、不適である。また、 $f\left(-\frac{2a+4}{3}\right) = 0$ のとき、

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{2a+4}{3}\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(-\frac{2a+4}{3}\right)^3 + (a+2)\left(-\frac{2a+4}{3}\right)^2 - 4a &= 0 \\ \Leftrightarrow -\frac{8}{27}(a+2)^3 + \frac{4}{9}(a+2)^3 - 4a &= 0 \\ \Leftrightarrow (a+2)^3 - 27a &= 0 \\ \Leftrightarrow a^3 + 6a^2 - 15a + 8 &= 0 \\ \Leftrightarrow (a-1)^2(a+8) &= 0 \end{aligned}$$

であり、 $a < -2$ より、

$$a = -8$$

である。

[2] $-\frac{2a+4}{3} = 0$, つまり $a = -2$ のとき

$f(x)$ の増減表は以下の通りである。

x	...	0	...
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	$f(0)$	$\nearrow$

増減表より、 $f(x)$ は常に単調増加であるから、 $f(x) = 0$ がちょうど2つの実数解をもつことはない。

[3] $-\frac{2a+4}{3} < 0$, つまり $a > -2$ のとき

$f(x)$ の増減表は以下の通りである。

x	...	$-\frac{2a+4}{3}$	...	0	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	$f\left(-\frac{2a+4}{3}\right)$	$\searrow$	$f(0)$	$\nearrow$

[1] と同様に、 $f(x) = 0$ がちょうど2つの実数解をもつとき、 $f(0) = 0$ または、

$f\left(-\frac{2a+4}{3}\right) = 0$ である。よって、

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ \Leftrightarrow a &= 0 \end{aligned}$$

であり、 $a > -2$ より、適する。また、

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{2a+4}{3}\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow (a-1)^2(a+8) &= 0 \end{aligned}$$

であり、 $a > -2$ より、

$$a = 1$$

である。

以上、[1], [2], [3] より、3次方程式 $x^3 + (a+2)x^2 - 4a = 0$ がちょうど2つの実数解をもつのは、

$$a = -8, 0, 1$$

のときである。

(答) $a = -8, 0, 1$

[解答]

$$\text{中心の座標}\left(\frac{5}{2}, 5\right), \text{半径}\frac{5\sqrt{5}}{2}$$

[解説]

2つの円の2つの交点を通る円の方程式は、実数 k ($k \neq -1$)を用いて、

$$k(x^2 + y^2 - 25) + \{(x-1)^2 + (y-2)^2 - 20\} = 0$$

と表される。このグラフが $(0, 0)$ を通るので、 $(x, y) = (0, 0)$ を代入すると、

$$k(0^2 + 0^2 - 25) + \{(-1)^2 + (-2)^2 - 20\} = 0$$

$$\Leftrightarrow -25k - 15 = 0$$

$$\therefore k = -\frac{3}{5}$$

である。よって、2つの円の2つの交点と $(0, 0)$ を通る円のグラフは、

$$-\frac{3}{5}(x^2 + y^2 - 25) + \{(x-1)^2 + (y-2)^2 - 20\} = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{5}x^2 - \frac{3}{5}y^2 + 15 + x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 - 20 = 0$$

$$\Leftrightarrow -3x^2 - 3y^2 + 5x^2 - 10x + 5y^2 - 20y = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x + y^2 - 10y = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + (y - 5)^2 = \frac{125}{4}$$

であり、

$$\sqrt{\frac{125}{4}} = \frac{5\sqrt{5}}{2}$$

であるので、このグラフが示す曲線は、中心 $\left(\frac{5}{2}, 5\right)$ 、半径 $\frac{5\sqrt{5}}{2}$ の円である。

(1)

C_1 と C_2 の式より, C_1 と C_2 の共有点の x 座標は,

$$\begin{aligned} x^2 &= -x^2 - 2ax - 2a^2 + a \\ \Leftrightarrow 2x^2 + 2ax + 2a^2 - a &= 0 \end{aligned}$$

の解である。よって, C_1 と C_2 が異なる2点で交わるのは, この方程式が異なる2つの実数解をもつときである。この方程式の判別式を D とすると,

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &> 0 \\ \Leftrightarrow a^2 - 2(2a^2 - a) &> 0 \\ \Leftrightarrow 3a^2 - 2a &< 0 \\ \Leftrightarrow a\left(a - \frac{2}{3}\right) &< 0 \\ \therefore 0 < a &< \frac{2}{3} \end{aligned}$$

である。

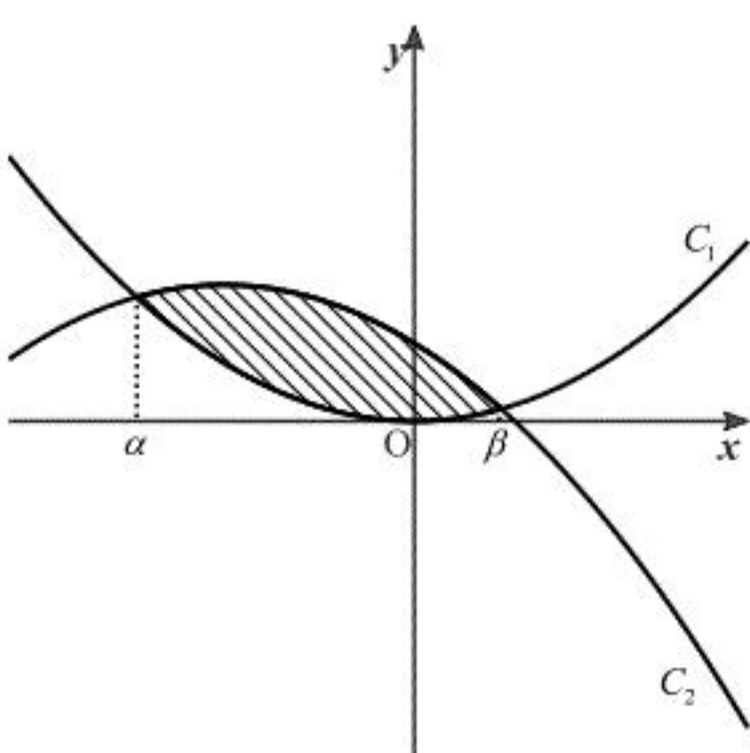
$$(\text{答}) \quad 0 < a < \frac{2}{3}$$

(2)

$2x^2 + 2ax + 2a^2 - a = 0$ の解, すなわち C_1 と C_2 の異なる2つの交点の x 座標を α, β ($\alpha < \beta$) とすると, 解と係数の関係より,

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -a \\ \alpha\beta = a^2 - \frac{1}{2}a \end{cases} \quad \cdots \textcircled{1}$$

である。ここで, C_1 は下に凸の放物線であり, C_2 は上に凸の放物線であるので, C_1 と C_2 のグラフの概形は以下の通りである。



グラフより, C_1 と C_2 とで囲まれた図形の面積は,

$$\begin{aligned} S &= \int_{\alpha}^{\beta} \{(-x^2 - 2ax - 2a^2 + a) - x^2\} dx \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} (-2x^2 - 2ax - 2a^2 + a) dx \end{aligned}$$

である。 α, β は $-2x^2 - 2ax - 2a^2 + a = 0$ の解であるので,

$$-2x^2 - 2ax - 2a^2 + a = -2(x - \alpha)(x - \beta)$$

である。したがって,

$$\begin{aligned} S &= \int_{\alpha}^{\beta} \{-2(x - \alpha)(x - \beta)\} dx \\ &= -2 \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx \\ &= -\frac{2}{6}(\beta - \alpha)^3 \\ &= \frac{1}{3}(\beta - \alpha)^3 \end{aligned}$$

である。①を用いると,

$$\begin{aligned} (\beta - \alpha)^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta \\ &= (-a)^2 - 4\left(a^2 - \frac{1}{2}a\right) \\ &= -3a^2 + 2a \end{aligned}$$

である。ここで, $\beta - \alpha > 0$ であり, $0 < a < \frac{2}{3}$ であるため $-3a^2 + 2a > 0$ である。よって,

$$\beta - \alpha = \sqrt{-3a^2 + 2a}$$

である。したがって,

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{3}(\beta - \alpha)^3 \\ &= \frac{1}{3}(-3a^2 + 2a)\sqrt{-3a^2 + 2a} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad S = \frac{1}{3}(-3a^2 + 2a)\sqrt{-3a^2 + 2a}$$

(3)

(2)より, $S = \frac{1}{3}(-3a^2 + 2a)\sqrt{-3a^2 + 2a}$ であるので, $-3a^2 + 2a$ が最大値をとるとき, S が最大値をとる。よって,

$$-3a^2 + 2a = -3\left(a - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}$$

であるので, $0 < a < \frac{2}{3}$ において, $-3a^2 + 2a$ は $a = \frac{1}{3}$ で最大値 $\frac{1}{3}$ をとる。よって, S の最大値は,

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{27} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \text{最大値} \quad \frac{\sqrt{3}}{27} \left(a = \frac{1}{3}\right)$$