

〔解答〕

(1)	$\frac{19}{108}$
(2)	$\frac{11}{54}$

〔解説〕

さいころを投げて1～6の目が出る確率はそれぞれ同様に確からしい。

(1)

a, b, c は大中小のさいころを投げて出た目であるから、1～6の6通りである。よって a, b, c の組の総数は $6 \times 6 \times 6 = 216$ (通り)である。 a, b, c のそれぞれの関係について場合分けをして考える。

[1] $a = b = c$ のとき

$a = 1, 4$ で abc は平方数となるから、 (a, b, c) の組は2通りとなる。

[2] 2つの出た目が同じで、もう1つの出た目がそれと異なるとき

$a = b \neq c$ の場合を考える。さいころの出た目で平方数であるのは1, 4のみであるから、 $c = 1, 4$ となり、 $a \neq c$ が満たされれば良い。3つのさいころの区別も考慮すると、 (a, b, c) の組は

$$2 \cdot 5 \cdot 1 \cdot {}_3C_2 = 30$$

通りとなる。

[3] 全ての出た目が異なるとき

(a, b, c) の組として考えられるのは、 $(2, 3, 6)$ 、およびこれらを並び変えたもののみであるから

$$3! = 6$$

通りとなる。

以上より求める確率は

$$\begin{aligned} \frac{2+30+6}{216} &= \frac{38}{216} \\ &= \frac{19}{108} \end{aligned}$$

となる。

(2)

$a+b+c$ が奇数である事象をA、 abc が平方数である事象をBとすると求める条件付き確率は

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

と表される。 $P(A)$ について、 $a+b+c$ が奇数となる a, b, c の組み合わせとして

$$\begin{cases} \text{偶数} + \text{偶数} + \text{奇数} \\ \text{奇数} + \text{奇数} + \text{奇数} \end{cases}$$

があり、これらの場合の数は、

$$3^3 \cdot {}_3C_1 + 3^3 = 108$$

であるから、

$$P(A) = \frac{108}{216} = \frac{1}{2}$$

となる。次に、 $P(A \cap B)$ について考える。 $a+b+c$ が奇数となる場合は、(1)の場合分けと照らし合わせて考えると、[1]では $a=1$ となる1通り、[2]では $c=1, a \neq c$ となる5通りを並べ替えて、全部で $5 \cdot {}_3C_2 = 15$ 通り、[3]はすべて満たされるから、6通りとなる。よってその確率は

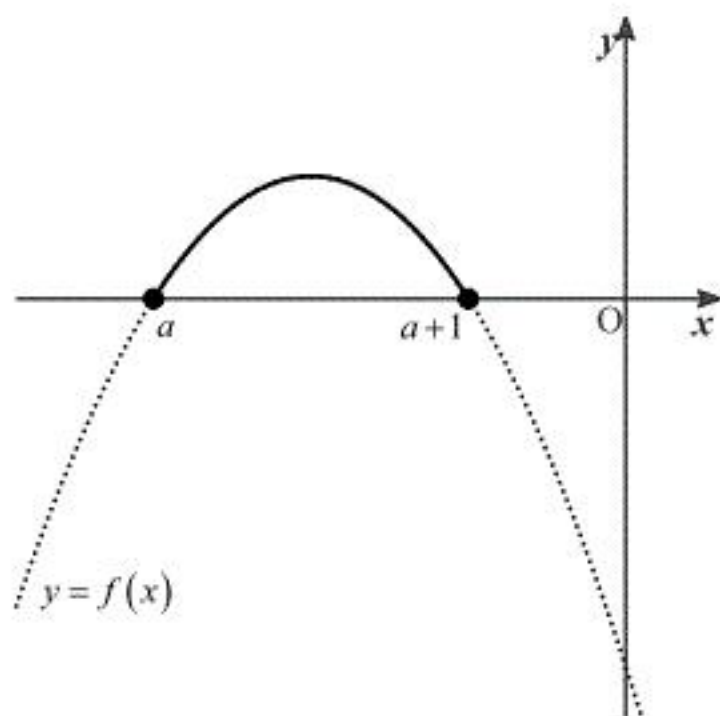
$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= \frac{1+15+6}{216} \\ &= \frac{11}{108} \end{aligned}$$

となる。したがって、求める確率 $P_A(B)$ は

$$\begin{aligned} P_A(B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \\ &= \frac{\frac{11}{108}}{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{11}{54} \end{aligned}$$

である。

$f(x) = ax^2 - 3x + b$ とする。高々 2 次の不等式 $f(x) > 0$ を満たす実数 x の範囲が $a < x < a+1$ となるとき、関数 $y = f(x)$ は上に凸でなければならないことから、 x^2 の係数について、 $a < 0$ である。



また、解の範囲が $a < x < a+1$ であるから、2 次方程式 $f(x) = 0$ は $x = a, a+1$ を解に持つことがわかる。よって、解と係数の関係から

$$\begin{cases} a + (a+1) = \frac{3}{a} \\ a(a+1) = \frac{b}{a} \end{cases}$$

が成立する。よって

$$\begin{aligned} 3 &= a(2a+1) \\ \Leftrightarrow 2a^2 + a - 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow (2a+3)(a-1) &= 0 \\ \Leftrightarrow a &= -\frac{3}{2} \quad (\because a < 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= a^2(a+1) \\ &= \left(-\frac{3}{2}\right)^2 \left(-\frac{3}{2} + 1\right) \\ &= -\frac{9}{8} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad (a, b) = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{9}{8}\right)$$

〔解答〕

$$(x, y) = \left(\frac{-3 - \sqrt{17}}{2}, \frac{-3 + \sqrt{17}}{2} \right), (1, 2)$$

〔解説〕

与式より

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} &= \frac{3}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{x+y}{xy} &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore x+y = \frac{3}{2}xy \quad \cdots \textcircled{1}$$

となるから、これを $xy(x+y)=6$ に代入すると

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}x^2y^2 &= 6 \\ \Leftrightarrow x^2y^2 &= 4 \\ \therefore xy &= \pm 2 \end{aligned}$$

となり、これと①より $(x+y, xy) = (\pm 3, \pm 2)$ (複合同順) が得られる。ここで、 x, y は t についての2次方程式 $t^2 - (x+y)t + xy = 0$ の2解であると考えることができるから、求める (x, y) の組は $t^2 + 3t - 2 = 0$ または $t^2 - 3t + 2 = 0$ の解の組と同値である。方程式の解はそれぞれ

$$t = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}, t = 1, 2 \text{ となるから、} x \leq y \text{ を考慮すると、求める } (x, y) \text{ の組は}$$

$$(x, y) = \left(\frac{-3 - \sqrt{17}}{2}, \frac{-3 + \sqrt{17}}{2} \right), (1, 2) \text{ である。}$$

(1)

与式を変形すると、

$$y = x^3 + ax^2 - a^2x + a^2 - a$$

$$\Leftrightarrow a^2(x-1) - a(x+1)(x-1) + (y-x^3) = 0$$

となる。すべての a についてこの方程式が成立する (x, y) が存在するとき、これは a についての恒等式とみることができ。つまり

$$\begin{cases} x-1=0 \\ (x+1)(x-1)=0 \\ y-x^3=0 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$$

となるから、求める P の座標は $(1, 1)$ である。

(答) $(1, 1)$

(2)

関数の両辺を微分すると

$$y' = 3x^2 + 2ax - a^2$$

であるから、点 P での C の接線の傾きは $3+2a-a^2$ であり、接線を l とすると、その方程式は

$$y-1 = (3+2a-a^2)(x-1)$$

$$\Leftrightarrow y = (-a^2+2a+3)x + a^2 - 2a - 2$$

と求まる。この方程式から、 C と l の交点のうち、 P ではないものを点 Q とし、その x 座標を求める。それぞれの方程式を連立することにより、

$$x^3 + ax^2 - a^2x + a^2 - a = (-a^2+2a+3)x + a^2 - 2a - 2$$

$$\Leftrightarrow x^3 + ax^2 - (2a+3)x + a+2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2(x+a+2) = 0$$

$$\therefore x = 1, -a-2$$

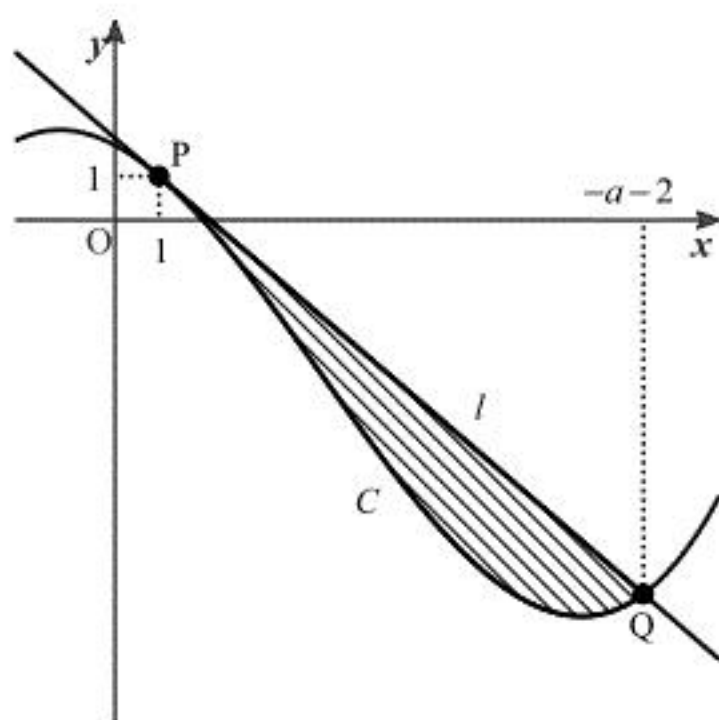
が得られるから、点 Q の x 座標は $x = -a-2$ となる。ここで 1 と $-a-2$ の大小について場合分けをする。

[1] $-a-2=1$ つまり $a=-3$ のとき

C と l の交点は1つしかなく、囲まれる領域は存在しないため、不適である。

[2] $-a-2>1$ つまり $a<-3$ のとき

C 及び l のグラフは下のようになる。



よって、 C と l に囲まれた部分の面積を S とすると

$$S = \int_1^{-a-2} \left[\{(-a^2+2a+3)x + a^2 - 2a - 2\} - (x^3 + ax^2 - a^2x + a^2 - a) \right] dx$$

$$= -\int_1^{-a-2} (x-1)^2(x+a+2) dx$$

$$= -\left[\frac{1}{3}(x-1)^3(x+a+2) \right]_1^{-a-2} + \int_1^{-a-2} \frac{1}{3}(x-1)^3 dx$$

$$= \left[\frac{1}{12}(x-1)^4 \right]_1^{-a-2}$$

$$= \frac{1}{12}(a+3)^4$$

と計算できる。題意より

$$\frac{1}{12}(a+3)^4 = \frac{16}{3}$$

$$\Leftrightarrow (a+3)^4 = 8^2$$

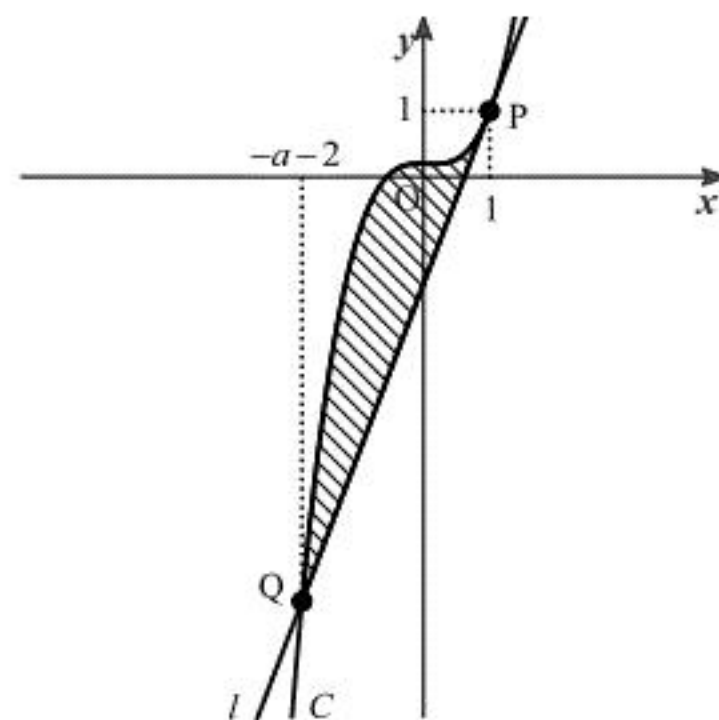
$$\Leftrightarrow (a+3)^2 = 8 \left(\because (a+3)^2 > 0 \right)$$

$$\Leftrightarrow a = -3 \pm 2\sqrt{2}$$

となる。 $a < -3$ から、求める a の値は $a = -3 - 2\sqrt{2}$ である。

[3] $-a-2 < 1$ つまり $a > -3$ のとき

C 及び l のグラフは下のようになる。



よって、 C と l に囲まれた部分の面積を S とすると、[2]を用いて

$$S = \int_{-a-2}^1 \left[(x^3 + ax^2 - a^2x + a^2 - a) - \{(-a^2+2a+3)x + a^2 - 2a - 2\} \right] dx$$

$$= -\int_1^{-a-2} (x-1)^2(x+a+2) dx$$

$$= \frac{1}{12}(a+3)^4$$

と計算できる。題意より

$$\frac{1}{12}(a+3)^4 = \frac{16}{3}$$

$$\Leftrightarrow a = -3 \pm 2\sqrt{2}$$

となる。 $a > -3$ から、求める a の値は $a = -3 + 2\sqrt{2}$ である。

以上より、求める a の値は $a = -3 \pm 2\sqrt{2}$ である。

(答) $a = -3 \pm 2\sqrt{2}$