

〔解答〕

(1)	$(2, 0), (3 + \sqrt{2}, \sqrt{2})$
(2)	$\frac{7 + 8\sqrt{2}}{6}$

〔解説〕

(1)

 C_1 と C_2 の式を連立して、 y を消去すると、

$$\begin{cases} 0 = -x^2 + 7x - 10 & (x < 3) \\ x - 3 = -x^2 + 7x - 10 & (x \geq 3) \end{cases}$$

となる。以下、 x の値に応じて場合分けを行う。[1] $x < 3$ のとき

$$\begin{aligned} -x^2 + 7x - 10 &= 0 \\ \Leftrightarrow -(x-2)(x-5) &= 0 \\ \therefore x &= 2 \quad (\because x < 3) \end{aligned}$$

となる。

[2] $x \geq 3$ のとき

$$\begin{aligned} -x^2 + 7x - 10 &= x - 3 \\ \Leftrightarrow x^2 - 6x + 7 &= 0 \\ \therefore x &= 3 + \sqrt{2} \quad (\because x \geq 3) \end{aligned}$$

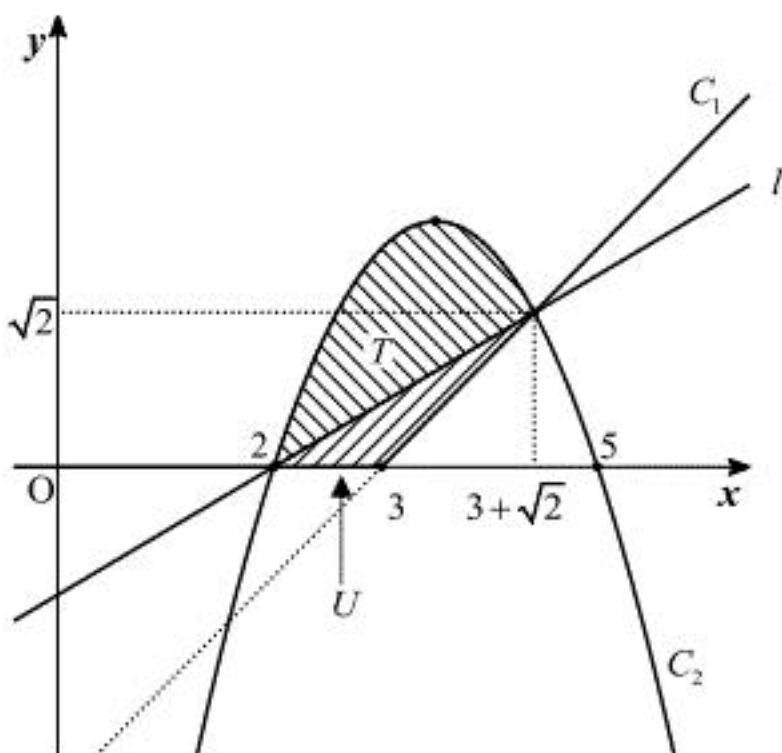
となる。

以上、[1]、[2]より、 C_1 と C_2 の交点の x 座標は $x = 2, 3 + \sqrt{2}$ である。よって、交点は $(2, 0), (3 + \sqrt{2}, \sqrt{2})$ である。

(2)

 $C_2: y = -\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}$ より、曲線 C_2 は $\left(\frac{7}{2}, \frac{9}{4}\right)$ を頂点とする上に凸な放物線である。ここで、2点 $(2, 0), (3 + \sqrt{2}, \sqrt{2})$ を通る直線を l とすると、直線 l の方程式は

$$\begin{aligned} y &= \frac{\sqrt{2} - 0}{3 + \sqrt{2} - 2}(x - 2) + 0 \\ &= (2 - \sqrt{2})(x - 2) \end{aligned}$$

である。よって、 C_1 と C_2 、 l の位置関係は下図の通りである。 C_1 と C_2 で囲まれた領域のうち、直線 l より上側の領域の面積を T 、直線 l より下側の領域の面積を U とする。このとき、

$$\begin{aligned} T &= \int_2^{3+\sqrt{2}} \left\{ (-x^2 + 7x - 10) - (2 - \sqrt{2})(x - 2) \right\} dx \\ &= -\int_2^{3+\sqrt{2}} (x - 2) \left\{ x - (3 + \sqrt{2}) \right\} dx \\ &= \frac{1}{6} \left\{ (3 + \sqrt{2}) - 2 \right\}^3 \\ &= \frac{7 + 5\sqrt{2}}{6} \end{aligned}$$

となる。一方、直線 l よりも下側の領域は x 軸上の底辺が1、高さが $\sqrt{2}$ の三角形であるため、

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

となる。よって、求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= T + U \\ &= \frac{7 + 5\sqrt{2}}{6} + \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{7 + 8\sqrt{2}}{6} \end{aligned}$$

である。

(1)

試行を3回繰り返した直後に台の上に玉が1つもないための条件は、1回目と2回目に取り出した玉の色が異なることである。よって、求める確率は

$$\frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} + \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{15}{28}$$

である。

$$\text{(答)} \quad \frac{15}{28}$$

(2)

試行を3回繰り返した直後に赤玉1個だけが台の上にあるための条件は、1回目と2回目に取り出した玉の色が同じであり、かつ、3回目に赤玉が出ることである。よって、(1)より、求める確率は

$$\left(1 - \frac{15}{28}\right) \cdot \frac{3}{8} = \frac{39}{224}$$

である。

$$\text{(答)} \quad \frac{39}{224}$$

(3)

試行を4回繰り返した直後に台の上に玉が1つもないための条件は、1回目と2回目に取り出した玉の色が同じであり、かつ、3回目と4回目に取り出した玉の色が同じであることである。よって、(1)より、求める確率は

$$\left(1 - \frac{15}{28}\right)^2 = \frac{169}{784}$$

である。

$$\text{(答)} \quad \frac{169}{784}$$

〔解答〕

(1)	極大値： $a+4$ ，極小値： a
(2)	$-4 < a \leq -\frac{25}{8}$

〔解説〕

(1)

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 12x + 9 \\ &= 3(x-1)(x-3) \end{aligned}$$

より、 $f'(x)=0$ とすると、 $x=1, 3$ となる。よって、増減表は次の通りである。

x	...	1	...	3	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	極大 $a+4$	$\searrow$	極小 a	$\nearrow$

上表より、関数 $f(x)$ は $x=1$ のとき極大値 $a+4$ 、 $x=3$ のとき極小値 a をとる。

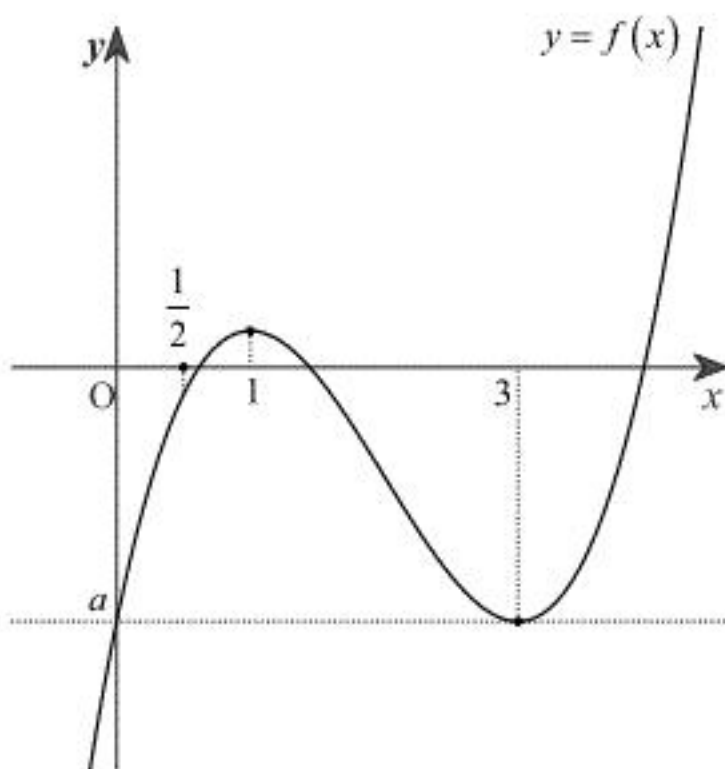
(2)

$$f(0) = f(3) = a$$

より、増減表から

$$f\left(\frac{1}{2}\right) > f(3)$$

である。(1)より、関数 $y=f(x)$ のグラフの概形は下図の通りである。



上図より、方程式 $f(x)=0$ が $x \geq \frac{1}{2}$ の範囲に異なる3つの解をもつ、すなわち、曲線 $y=f(x)$

が x 軸と $x \geq \frac{1}{2}$ の範囲で異なる3つの共有点をもつための条件は、

$$\begin{aligned} \begin{cases} f\left(\frac{1}{2}\right) \leq 0 \\ f(1) > 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a + \frac{25}{8} \leq 0 \\ a + 4 > 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a \leq -\frac{25}{8} \\ a > -4 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow -4 < a \leq -\frac{25}{8} \end{aligned}$$

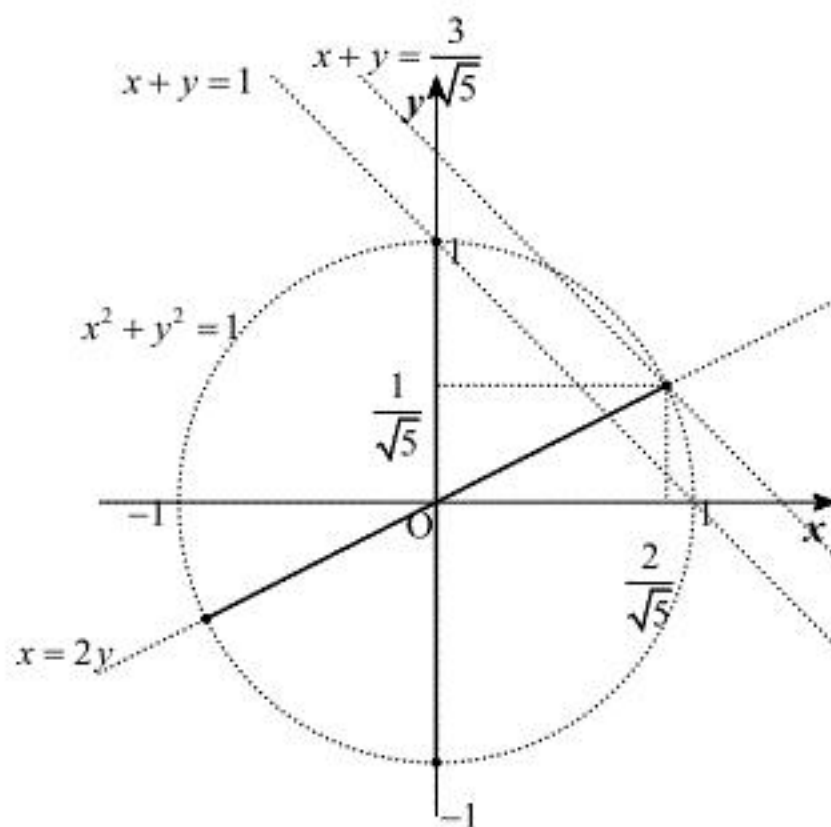
である。

$$x^2 - 2xy = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x - 2y) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0, 2y$$

となるため、 $x^2 - 2xy = 0$ かつ $x^2 + y^2 \leq 1$ を満たす点 (x, y) の存在範囲は下図の実線部のようになる。



ここで、 k を実数とし、 $x + y = k$ とおく。このとき、 $x + y = k$ は傾き -1 、 y 切片 k の直線を表す。よって、求める値は直線 $x + y = k$ と上図の領域が共有点をもつときの k の最大値である。上図より、 k が最大となるのは、直線 $x + y = k$ が点 $\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ を通るときであるため、

$(x, y) = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ のとき $x + y$ は最大値 $\frac{3}{\sqrt{5}}$ をとる。

(答) $(x, y) = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ のとき、最大値 $\frac{3}{\sqrt{5}}$