

〔解答〕

$$(1) \quad y = \left(\sqrt{a^2 + 2} - a \right) x + \frac{a^2 + 1 - a\sqrt{a^2 + 2}}{2}$$

$$(2) \quad \left(\frac{a}{2}, \frac{a^2 + 3}{2} \right)$$

〔解説〕

(1)

$C_1: y = -x^2$ について $y' = -2x$ より, $x = t$ における C_1 の接線は,

$$y = -2t(x - t) - t^2 = -2tx + t^2$$

である。この直線が C_2 にも接するとき, C_2 と直線の式を連立して得られる x についての 2 次方程式

$$\begin{aligned} (x - a)^2 + 1 &= -2tx + t^2 \\ \Leftrightarrow x^2 - 2(a - t)x + (1 + a^2 - t^2) &= 0 \end{aligned}$$

が重解を持つ。よって, 判別式を D とすると,

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= 0 \\ \Leftrightarrow (a - t)^2 - (1 + a^2 - t^2) &= 0 \\ \Leftrightarrow 2t^2 - 2at - 1 &= 0 \\ \therefore t &= \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 2}}{2} \end{aligned}$$

となる。 $a \leq |a| = \sqrt{a^2} < \sqrt{a^2 + 2}$ より, $\sqrt{a^2 + 2} > a$ であるから,

$$t = \frac{a + \sqrt{a^2 + 2}}{2} \text{ のとき, 接線の傾きは } -\left(a + \sqrt{a^2 + 2}\right) (< 0)$$

$$t = \frac{a - \sqrt{a^2 + 2}}{2} \text{ のとき, 接線の傾きは } \sqrt{a^2 + 2} - a (> 0)$$

である。したがって, L_1, L_2 のうち傾きが正であるような接線の傾きは $\sqrt{a^2 + 2} - a$ であるから, 求める直線の方程式は,

$$\begin{aligned} y &= \left(\sqrt{a^2 + 2} - a \right) x + \left(\frac{a - \sqrt{a^2 + 2}}{2} \right)^2 \\ &= \left(\sqrt{a^2 + 2} - a \right) x + \frac{a^2 + 1 - a\sqrt{a^2 + 2}}{2} \end{aligned}$$

である。

(2)

$f(x) = (x - a)^2 + 1$ とする。このとき, P_1, P_2 の x 座標を $x = \alpha, \beta$ ($\alpha < \beta$) とすると, 線分 P_1P_2 の中点の座標は,

$$\left(\frac{\alpha + \beta}{2}, \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2} \right)$$

と表される。ここで, $f'(x) = 2(x - a)$ かつ, $y = f(x)$ が下に凸な 2 次関数であるから, $f'(\alpha) < f'(\beta)$ となる。ゆえに, L_1, L_2 が C_2 と接する点の x 座標が P_1, P_2 であるから, L_1, L_2 の傾きと P_1, P_2 における接線の傾きに注目して,

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \sqrt{a^2 + 2} - a = f'(\beta) \\ -(\sqrt{a^2 + 2} + a) = f'(\alpha) \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} \sqrt{a^2 + 2} - a = 2(\beta - a) \\ -(\sqrt{a^2 + 2} + a) = 2(\alpha - a) \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} \alpha = \frac{1}{2}(a - \sqrt{a^2 + 2}) \\ \beta = \frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 + 2}) \end{cases} \end{aligned}$$

が得られる。これより, α, β は

$$\alpha + \beta = a, \alpha\beta = -\frac{1}{2}$$

を満たすから,

$$\begin{aligned} f(\alpha) + f(\beta) &= (\alpha - a)^2 + 1 + (\beta - a)^2 + 1 \\ &= (\alpha^2 + \beta^2) - 2a(\alpha + \beta) + 2a^2 + 2 \\ &= \left\{ a^2 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \right\} - 2a \cdot a + 2a^2 + 2 \\ &= a^2 + 3 \end{aligned}$$

である。したがって, $\left(\frac{\alpha + \beta}{2}, \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2} \right)$ に代入して, 線分 P_1P_2 の中点の座標は

$$\left(\frac{a}{2}, \frac{a^2 + 3}{2} \right) \text{ である。}$$

(1)

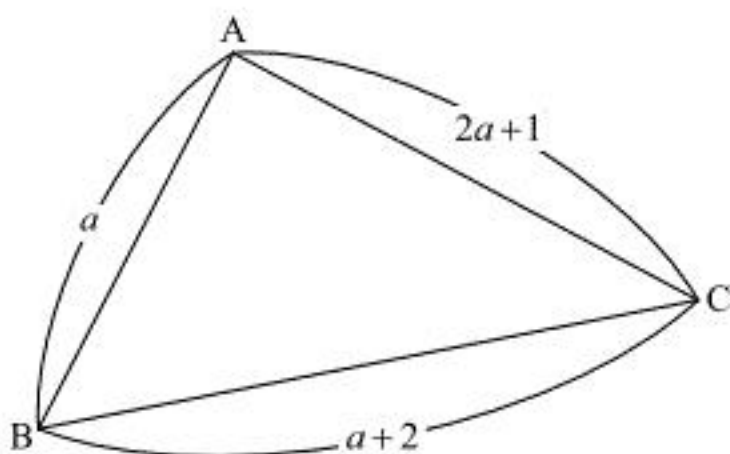
三角形の1辺が他の2辺の差より大きく、他の2辺の和より小さいから、

$$\begin{aligned} |(a+2)-a| &< 2a+1 < (a+2)+a \\ \Leftrightarrow 2 &< 2a+1 < 2a+2 \\ \therefore a &> \frac{1}{2} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \ a > \frac{1}{2}$$

(2)



(1)より、 $a > \frac{1}{2}$ のもとで、上図のような $\triangle ABC$ を考える。このとき

$a < a+2$, $a < 2a+1$ ($\because a > 0$) より、最も長い辺となるのは、BC または CA のいずれかである。以下、最も長い辺となる辺に注目して場合分けをする。

[1] BCが最も長い辺となるとき

a の範囲は、 $a+2 > 2a+1$ より、 $\frac{1}{2} < a < 1$ である。また、BCが最も長い辺より、 $\angle BAC$ が

最大角である。このとき、 $\triangle ABC$ が鋭角三角形となる条件は、 $0 < \angle BAC < \frac{\pi}{2}$ より

$\cos \angle BAC > 0$ である。よって、

$$\begin{aligned} \cos \angle BAC &> 0 \\ \Leftrightarrow \frac{a^2 + (2a+1)^2 - (a+2)^2}{2a(2a+1)} &> 0 \\ \Leftrightarrow 4a^2 - 3 &> 0 \ (\because a > 0) \\ \therefore \frac{\sqrt{3}}{2} &< a < 1 \ (\because 0 < a < 1) \end{aligned}$$

である。

[2] CAが最も長い辺となるとき

a の範囲は、 $a+2 \leq 2a+1$ より、 $a \geq 1$ である。また、CAが最も長い辺より、 $\angle ABC$ が最

大角である。このとき、 $\triangle ABC$ が鋭角三角形となる条件は、 $0 < \angle ABC < \frac{\pi}{2}$ より

$\cos \angle ABC > 0$ である。よって、

$$\begin{aligned} \cos \angle ABC &> 0 \\ \Leftrightarrow \frac{a^2 + (a+2)^2 - (2a+1)^2}{2a(a+2)} &> 0 \\ \Leftrightarrow -2a^2 + 3 &> 0 \ (\because a > 0) \\ \therefore 1 &\leq a < \frac{\sqrt{6}}{2} \ (\because 1 \leq a) \end{aligned}$$

である。

以上、[1], [2]より、鋭角三角形となるような a の範囲は $\frac{\sqrt{3}}{2} < a < \frac{\sqrt{6}}{2}$ である。

$$(\text{答}) \ \frac{\sqrt{3}}{2} < a < \frac{\sqrt{6}}{2}$$

〔解答〕

$$(1) \quad \frac{\pi}{3}$$

$$(2) \quad \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$$

$$(3) \quad \frac{3}{4}$$

〔解説〕

(1)

$\overrightarrow{OA}$ および $\overrightarrow{OB}$ のなす角を θ ($0 \leq \theta \leq \pi$) とする。このとき、 $|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{2}$, $|\overrightarrow{OB}| = \sqrt{2}$, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 1$

より,

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OB}|} = \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \theta &= \frac{\pi}{3} \quad (\because 0 \leq \theta \leq \pi) \end{aligned}$$

である。

(2)

実数 α, β, γ を用いて、 $\overrightarrow{OD} = (\alpha, \beta, \gamma)$ とする。このとき、 $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OB} \perp \overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD} = 3$ より,

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD} = 0 \\ \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OD} = 0 \\ \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD} = 3 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \\ \alpha - \gamma = 3 \end{cases} \\ \therefore &\begin{cases} \alpha = \frac{3}{2} \\ \beta = \frac{3}{2} \\ \gamma = -\frac{3}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

となる。したがって、 $D\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ である。

(3)

$\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OB} \perp \overrightarrow{OD}$ より、 $\overrightarrow{OD} \perp (\text{平面 } OAB)$ であるから、四面体 $OABD$ は $\triangle OAB$ を底面とする、高さ OD の四面体である。ここで、(2)より,

$$OD = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3}{2}\sqrt{3}$$

であり、 $\triangle OAB$ の面積は

$$\frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2 |\overrightarrow{OB}|^2 - (\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB})^2} = \frac{\sqrt{2 \cdot 2 - 1}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

である。したがって、四面体 $OABD$ の体積は、

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3}{2} \sqrt{3} = \frac{3}{4}$$

である。

(1)

求める点の座標を (p, q) とすると、

$$q = f(p) \Leftrightarrow (-p+1)a + (p^4 + 3p^3 + p^2 - 3p - 2 - q) = 0$$

が任意の a について成立する。ゆえに、この式は a についての恒等式であるから、係数を比較して、

$$\begin{cases} -p+1=0 \\ p^4 + 3p^3 + p^2 - 3p - 2 - q = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} p=1 \\ q=0 \end{cases}$$

となるから、 $y = f(x)$ は $(1, 0)$ を a の値によらず通る。

(答) $(1, 0)$

(2)

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x^4 + 3x^3 + x^2 - 3x - 2) - a(x-1) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-1)(x^3 + 4x^2 + 5x + 2 - a) &= 0 \\ \therefore x=1, x^3 + 4x^2 + 5x + 2 &= a \end{aligned}$$

である。ここで、 $x^3 + 4x^2 + 5x + 2 = a$ が $x=1$ を解に持つような a の値は、 $a=12$ である。以下、 a の値に注目して場合分けをする。

[1] $a=12$ のとき

$f(x)=0$ を満たす実数 x の個数 m について、 $x^3 + 4x^2 + 5x + 2 = 12$ が $x=1$ を解に持つから

$$m = (x^3 + 4x^2 + 5x + 2 = 12 \text{ を満たす実数 } x \text{ の個数})$$

となる。ゆえに、 $m=2$ となるのは、 $x^3 + 4x^2 + 5x + 2 = 12$ が実数解をちょうど2つ持つときである。しかし、

$$\begin{aligned} x^3 + 4x^2 + 5x + 2 &= 12 \\ \Leftrightarrow x^3 + 4x^2 + 5x - 10 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + 5x + 10) &= 0 \\ \therefore x=1 \left(\because x^2 + 5x + 10 = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{15}{4} > 0 \right) \end{aligned}$$

より、実数解はただ1つのみであるから不適である。

[2] $a \neq 12$ のとき

$f(x)=0$ を満たす実数 x の個数 m について、 $x^3 + 4x^2 + 5x + 2 = a$ が $x=1$ を解に持つことはないから、

$$m = (x^3 + 4x^2 + 5x + 2 = a \text{ を満たす実数 } x \text{ の個数}) + 1$$

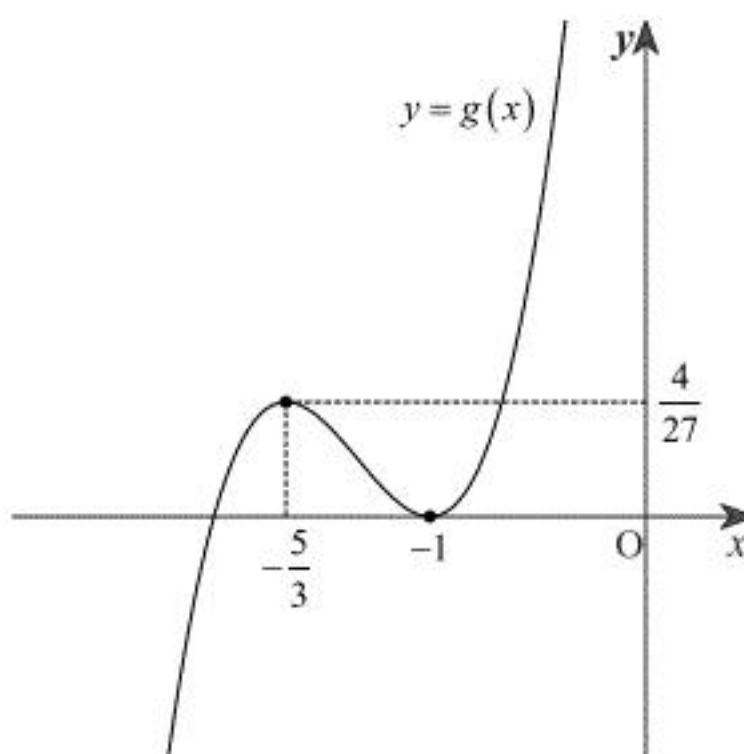
が成り立つ。ゆえに、 $m=2$ となるのは、 $x^3 + 4x^2 + 5x + 2 = a$ が実数解をただ1つ持つ、すなわち $y = x^3 + 4x^2 + 5x + 2$ と $y = a$ が共有点をただ1つ持つときである。ここで、 $g(x) = x^3 + 4x^2 + 5x + 2$ とすると、

$$g'(x) = 3x^2 + 8x + 5 = (x+1)(3x+5)$$

より、 $g'(x)=0 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{3}, -1$ である。したがって、 $g(x)$ の増減表は以下の通りである。

x	...	$-\frac{5}{3}$	...	-1	...
$g'(x)$	+	0	-	0	+
$g(x)$	$\nearrow$	$\frac{4}{27}$	$\searrow$	0	$\nearrow$

よって、 $y = g(x)$ のグラフは下図の通りである。



図より、 $y = g(x)$ と $y = a$ が共有点をただ1つ持つような a の範囲は、 $a < 0, \frac{4}{27} < a$ である。

したがって、 $m=2$ となるような a の範囲は、 $a \neq 12$ と合わせて、

$$a < 0, \frac{4}{27} < a < 12, 12 < a \text{ である。}$$

以上、[1], [2]より、求める a の範囲は $a < 0, \frac{4}{27} < a < 12, 12 < a$ である。

(答) $a < 0, \frac{4}{27} < a < 12, 12 < a$