

〔解答〕

(1)	$x = -3, 5 \pm 4\sqrt{2}$	(2)	-1440
-----	---------------------------	-----	-------

〔解説〕

(1)

$$2\log_2|x-1| - \log_2|x+1| - 3 = 0$$

について、真数条件より、

$$|x-1| > 0 \text{ かつ } |x+1| > 0$$

$$\Leftrightarrow x \neq \pm 1$$

であり、このとき、

$$2\log_2|x-1| = \log_2|x+1| + 3$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x-1)^2 = \log_2 8|x+1|$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 = 8|x+1|$$

となる。ここで、 $x \neq -1$ より、 $x+1 \neq 0$ であるから、 $x+1$ の正負により場合分けを行う。

[1] $x+1 > 0$ 、すなわち $x > -1$ のとき

$$(x-1)^2 = 8(x+1)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 10x - 7 = 0$$

$$\therefore x = 5 \pm 4\sqrt{2}$$

となる。ここで、 $1 < \sqrt{2} < \frac{3}{2}$ より、 $-1 < 5 - 4\sqrt{2} < 5 + 4\sqrt{2}$ であるから、 $x > -1$ の範囲に 2 つ

の実数解 $x = 5 \pm 4\sqrt{2}$ をもつ。

[2] $x+1 < 0$ 、すなわち $x < -1$ のとき

$$(x-1)^2 = -8(x+1)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 = 0$$

$$\therefore x = -3$$

となる。ここで、 $-3 < -1$ であるから、 $x < -1$ の範囲に 1 つの実数解 $x = -3$ をもつ。

以上、[1]、[2]より、 $2\log_2|x-1| - \log_2|x+1| - 3 = 0$ を満たす実数 x は、 $x = -3, 5 \pm 4\sqrt{2}$ である。

(2)

$(x-2y+3z)^6$ の一般項は、 $a+b+c=6$ を満たす負でない整数 a, b, c を用いて、

$\frac{6!}{a!b!c!} x^a \cdot (-2y)^b \cdot (3z)^c$ と表せる。よって、 $x^a y^b z^c$ の係数は $\frac{6!}{a!b!c!} \cdot (-2)^b \cdot 3^c$ であるから、

$(x-2y+3z)^6$ を展開した整式の $x^2 y^3 z$ の係数は、

$$\frac{6!}{2!3!1!} \cdot (-2)^3 \cdot 3^1 = -1440$$

である。

$$f(x) = |x^3 - 10x^2 + 9x| = |x(x-1)(x-9)|$$

であり,

$$x(x-1)(x-9) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1, 9 < x$$

である。ここで、 $y = f(x)$ のグラフと直線 $y = ax$ の共有点の x 座標は、 x についての方程式 $f(x) - ax = 0$ の実数解に一致するから、以下、 $f(x) - ax = 0$ の異なる解の個数を考える。ここで、 $0 < x < 1, 9 < x$ のときと $x \leq 0, 1 \leq x \leq 9$ のときとで場合分けを行う。

[1] $0 < x < 1, 9 < x$ のとき

$$f(x) - ax = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 10x^2 + (9-a)x = 0$$

$$\Leftrightarrow x\{x^2 - 10x + (9-a)\} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \pm \sqrt{16+a} & (a \geq -16 \text{ のとき}) \\ \text{解なし} & (a < -16 \text{ のとき}) \end{cases} \quad (\because x > 0)$$

となる。ここで、 $x = 5 + \sqrt{16+a}$ が $0 < x < 1, 9 < x$ に含まれる条件は、 $5 + \sqrt{16+a} \geq 5$ より、

$$9 < 5 + \sqrt{16+a} \Leftrightarrow 0 < a$$

であり、 $x = 5 - \sqrt{16+a}$ が $0 < x < 1, 9 < x$ に含まれる条件は、 $5 - \sqrt{16+a} \leq 5$ より、

$$0 < 5 - \sqrt{16+a} < 1 \Leftrightarrow 0 < a < 9$$

である。よって、 $0 < x < 1, 9 < x$ における $f(x) - ax = 0$ の異なる実数解の個数は

$$\begin{cases} a \leq 0 \text{ のとき解なし} \\ 0 < a < 9 \text{ のとき } x = 5 \pm \sqrt{16+a} \text{ の } 2 \text{ 個} \\ 9 \leq a \text{ のとき } x = 5 + \sqrt{16+a} \text{ の } 1 \text{ 個} \end{cases}$$

となる。

[2] $x \leq 0, 1 \leq x \leq 9$ のとき

$$f(x) - ax = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 10x^2 + (9+a)x = 0$$

$$\Leftrightarrow x\{x^2 - 10x + (9+a)\} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, 5 \pm \sqrt{16-a} & (a \leq 16 \text{ のとき}) \\ x = 0 & (a > 16 \text{ のとき}) \end{cases}$$

となる。ここで、 $x = 5 + \sqrt{16-a}$ が $x < 0, 1 \leq x \leq 9$ に含まれる条件は、 $5 + \sqrt{16-a} \geq 5$ より、

$$5 \leq 5 + \sqrt{16-a} \leq 9 \Leftrightarrow 0 \leq a \leq 16$$

であり、 $x = 5 - \sqrt{16-a}$ が $x < 0, 1 \leq x \leq 9$ に含まれる条件は、 $5 - \sqrt{16-a} \leq 5$ より、

$$5 - \sqrt{16-a} < 0, 1 \leq 5 - \sqrt{16-a} \leq 5 \Leftrightarrow a < -9, 0 \leq a \leq 16$$

である。また、 $a = 16$ のとき $5 + \sqrt{16-a} = 5 - \sqrt{16-a}$ となることに注意すると、 $x \leq 0, 1 \leq x \leq 9$ における $f(x) - ax = 0$ の異なる実数解の個数は

$$\begin{cases} a < -9 \text{ のとき } x = 0, 5 - \sqrt{16-a} \text{ の } 2 \text{ 個} \\ -9 \leq a < 0 \text{ のとき } x = 0 \text{ の } 1 \text{ 個} \\ 0 \leq a < 16 \text{ のとき } x = 0, 5 \pm \sqrt{16-a} \text{ の } 3 \text{ 個} \\ a = 16 \text{ のとき } x = 0, 5 \text{ の } 2 \text{ 個} \\ 16 < a \text{ のとき } x = 0 \text{ の } 1 \text{ 個} \end{cases}$$

となる。

以上、[1], [2]より、 $f(x) - ax = 0$ の異なる実数解の個数は、

$$\begin{cases} a < -9 \text{ のとき, } x = 0, 5 - \sqrt{16-a} \text{ の } 2 \text{ 個} \\ -9 \leq a < 0 \text{ のとき, } x = 0 \text{ の } 1 \text{ 個} \\ a = 0 \text{ のとき, } x = 0, 1, 9 \text{ の } 3 \text{ 個} \\ 0 < a < 9 \text{ のとき, } x = 0, 5 \pm \sqrt{16+a}, 5 \pm \sqrt{16-a} \text{ の } 5 \text{ 個} \\ 9 \leq a < 16 \text{ のとき, } x = 0, 5 + \sqrt{16+a}, 5 \pm \sqrt{16-a} \text{ の } 4 \text{ 個} \\ a = 16 \text{ のとき, } x = 0, 5, 5 + 4\sqrt{2} \text{ の } 3 \text{ 個} \\ 16 < a \text{ のとき, } x = 0, 5 + \sqrt{16+a} \text{ の } 2 \text{ 個} \end{cases}$$

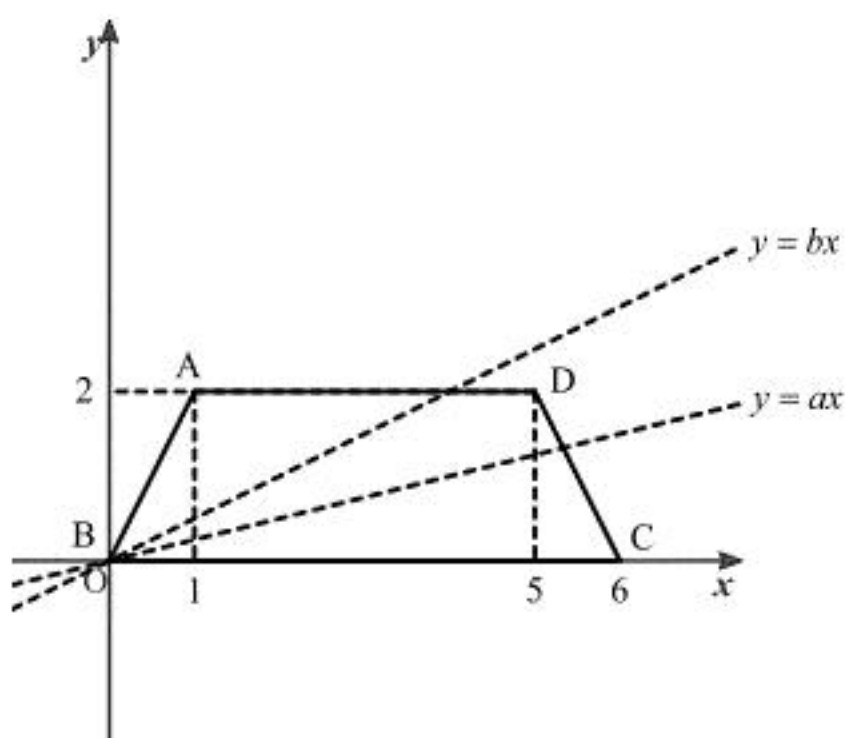
となり、 $y = f(x)$ のグラフと直線 $y = ax$ の共有点の個数が4であるような実数 a の範囲は、 $9 \leq a < 16$ である。

(答) $9 \leq a < 16$

〔解答〕

$a = \frac{10}{49}$	$b = \frac{6}{13}$
---------------------	--------------------

〔解説〕



上図より、四角形 ABCD は $AD \parallel BC$ の台形であるから、その面積は、

$$\frac{1}{2} \cdot (4 + 6) \cdot 2 = 10$$

である。よって、四角形 ABCD が 2 直線 $y = ax$, $y = bx$ により 3 等分されるには、2 直線により四角形 ABCD を分割してできる 3 つの図形の面積がいずれも $\frac{10}{3}$ に等しければよい。ここで、

$$\begin{aligned}\triangle ABD &= \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 = 4 > \frac{10}{3} \\ \triangle BCD &= \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2 = 6 > \frac{10}{3}\end{aligned}$$

であるから、直線 $y = ax$ は線分 CD と、直線 $y = bx$ は線分 AD と、それぞれ点を共有する。これらの点をそれぞれ点 X, Y とする。ここで、直線 CD の方程式は、

$$CD: y = \frac{0-2}{6-5}(x-6) \Leftrightarrow y = -2x+12$$

より、X の x 座標は、

$$-2x+12 = ax \Leftrightarrow x = \frac{12}{a+2} \quad (\because a > 0)$$

であるから、X の y 座標は $\frac{12a}{a+2}$ である。よって、

$$\begin{aligned}\triangle BCX &= \frac{10}{3} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \frac{12a}{a+2} &= \frac{10}{3} \\ \therefore a &= \frac{10}{49}\end{aligned}$$

である。また、Y の y 座標は 2 より、Y の x 座標は $\frac{2}{b}$ ($\because b > 0$) であるから、

$$\begin{aligned}\triangle ABY &= \frac{10}{3} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{b} - 1 \right) \cdot 2 &= \frac{10}{3} \\ \therefore b &= \frac{6}{13}\end{aligned}$$

となる。

(1)

最初 A が原点 $(0, 0)$, B が点 $(3, 3)$ にあるから、操作を 3 回繰り返して大きなコインの表が a 回、裏が $3-a$ 回、小さなコインの表が b 回、裏が $3-b$ 回 ($a=0, 1, 2, 3, b=0, 1, 2, 3$) 出たとき、そのあとに A は点 $(3-a, a)$, B は点 $(b, 3-b)$ に移動する。また、それらの点に移動する場合の数は、それぞれ $\frac{3!}{a!(3-a)!}$ 通り, $\frac{3!}{b!(3-b)!}$ 通りであり、2 つのコインの裏表は独立に決まるから 2 つのコインの面の出方の総数は、

$$2^3 \cdot 2^3 = 2^6 \text{ (通り)}$$

存在し、これらはすべて同様に確からしい。以上より、A と B が同じ点にあるのは $(a, b) = (0, 3), (2, 1), (1, 2), (3, 0)$ のときであるから、求める確率は、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2^6} \cdot \left(\frac{3!}{3!0!} \cdot \frac{3!}{0!3!} + \frac{3!}{2!1!} \cdot \frac{3!}{1!2!} + \frac{3!}{1!2!} \cdot \frac{3!}{2!1!} + \frac{3!}{0!3!} \cdot \frac{3!}{3!0!} \right) \\ &= \frac{1+9+9+1}{64} \\ &= \frac{5}{16} \end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \frac{5}{16}$$

(2)

操作を 6 回繰り返して A が点 $(3, 3)$, B が点 $(0, 0)$ になる場合の数は、(1) と同様に考えると、

$$\frac{6!}{3!3!} \cdot \frac{6!}{3!3!} = 400 \text{ (通り)}$$

となる。この場合において、いずれかのコインについて最初の 3 回の操作で表が c 回、裏が $3-c$ 回 ($c=0, 1, 2, 3$) 出たならば、残りの 3 回の操作では表が $3-c$ 回、裏が c 回出なければならない。よって、3 回目の操作の終了時に A, B が同じ点にあり、操作を 6 回繰り返して A が点 $(3, 3)$, B が点 $(0, 0)$ になる場合の数は、

$$\begin{aligned} & \left(\frac{3!}{0!3!} \right)^2 \cdot \left(\frac{3!}{3!0!} \right)^2 + \left(\frac{3!}{1!2!} \right)^2 \cdot \left(\frac{3!}{2!1!} \right)^2 + \left(\frac{3!}{2!1!} \right)^2 \cdot \left(\frac{3!}{1!2!} \right)^2 + \left(\frac{3!}{3!0!} \right)^2 \cdot \left(\frac{3!}{0!3!} \right)^2 \\ &= 1+81+81+1 \\ &= 164 \text{ (通り)} \end{aligned}$$

である。以上から、求める確率は、

$$\frac{164}{400} = \frac{41}{100}$$

である。

$$\text{(答)} \quad \frac{41}{100}$$