

〔解答〕

(1)	$\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$
(2)	最小値 $= 9 + 4\sqrt{2}$ t の値 $= 2\sqrt{2}$

〔解説〕

(1)

$\tan \alpha = \frac{1}{2}$, $\tan \beta = \frac{1}{3}$ であるため,

$$\begin{aligned}\tan(\alpha + \beta) &= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \\ &= \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} \\ &= 1\end{aligned}$$

となる。 $0 \leq \alpha + \beta \leq \pi$ より, $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$ である。

(2)

直線 L の方程式は $y = -tx + t + 8$ であり, 点 A の座標は $\left(1 + \frac{8}{t}, 0\right)$, 点 B の座標は $(0, t + 8)$ であ

る。よって $t > 0$ より, $OA + OB = 9 + t + \frac{8}{t}$ である。相加相乗平均の関係を用いることにより

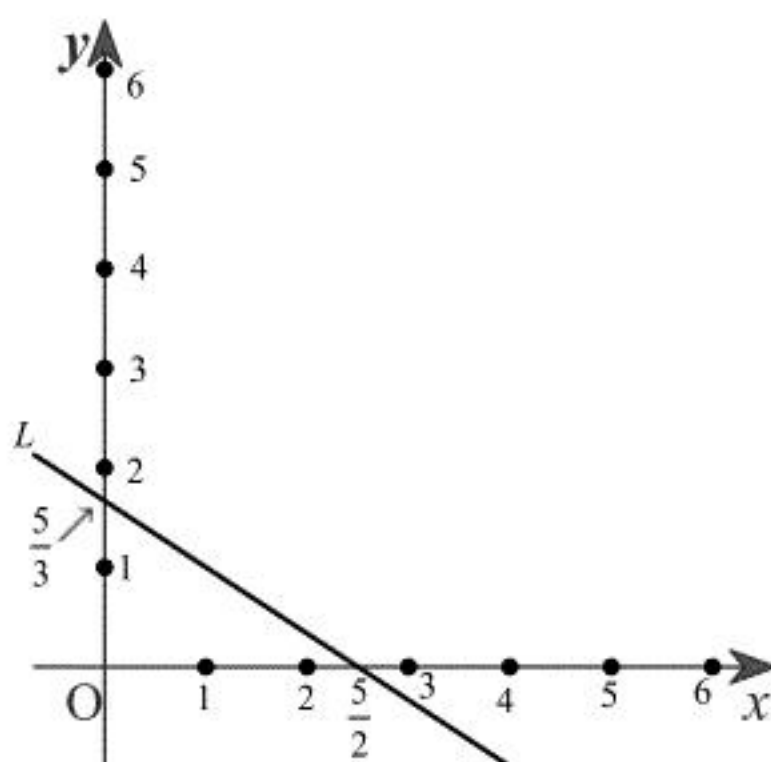
$$\begin{aligned}OA + OB &= 9 + t + \frac{8}{t} \\ &\geq 9 + 2\sqrt{t \cdot \frac{8}{t}} \\ &= 9 + 4\sqrt{2}\end{aligned}$$

となる。等号成立条件は, $t = \frac{8}{t}$, すなわち $t > 0$ より $t = 2\sqrt{2}$ である。以上より $OA + OB$ は

$t = 2\sqrt{2}$ のとき最小値 $9 + 4\sqrt{2}$ をとる。

(1)

さいころの目の出方は $6^2 = 36$ (通り) あり、これらは同様に確からしい。直線 L は下図のようになり、線分 AB と直線 L が交わるのは、2 点 A, B が直線 L について異なる側に存在するときである。



よって、 $a < \frac{5}{2}$ かつ $b > \frac{5}{3}$, または、 $a > \frac{5}{2}$ かつ $b < \frac{5}{3}$ となることが条件であるから、求める確率は、

$$\frac{2 \cdot 5 + 4 \cdot 1}{36} = \frac{14}{36} = \frac{7}{18}$$

である。

(答) $\frac{7}{18}$

(2)

$a \neq 0$ より直線 AB の傾きは $-\frac{b}{a}$, 直線 L の傾きは $-\frac{2}{3}$ であるから、線分 AB と直線 L が平行と

なるのは $-\frac{b}{a} = -\frac{2}{3}$, すなわち $(a, b) = (3, 2), (6, 4)$ のときである。よって求める確率は、

$$\frac{2}{36} = \frac{1}{18} \text{ である。}$$

(答) $\frac{1}{18}$

(3)

三角形 OAB の面積が 6 となる条件は $\frac{1}{2}ab = 6$, すなわち $ab = 12$ であり、それを満たすのは

$$(a, b) = (2, 6), (3, 4), (4, 3), (6, 2)$$

のときである。また(1)より、この中で線分 AB と直線 L が交わるのは $(a, b) = (2, 6)$ のみであ

る。よって求める確率は、 $\frac{1}{4}$ である。

(答) $\frac{1}{4}$

〔解答〕

(1)	$y \geq \frac{1}{2}x^2$	(2)	$y \leq x + \frac{1}{4}$
(3)	$\frac{\sqrt{6}}{2}$		

〔解説〕

(1)

C_1 を変形すると、 $2a^2 - 2xa + x^2 - y = 0$ となる。この a の2次方程式が実数解を持つ条件を調べれば良い。判別式を E_1 とおくと

$$\frac{E_1}{4} = x^2 - 2(x^2 - y) = -x^2 + 2y$$

となるため、 $E_1 \geq 0 \Leftrightarrow y \geq \frac{1}{2}x^2$ が求める不等式である。

(2)

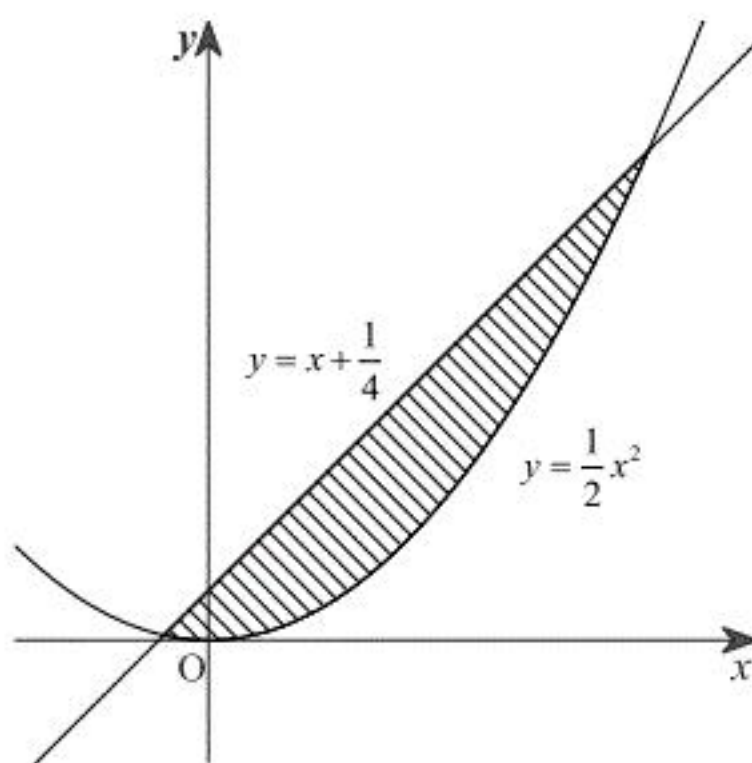
C_2 を変形すると、 $b^2 - (2x+1)b + x^2 + y = 0$ となる。この b の2次方程式が実数解を持つ条件を調べれば良い。判別式を E_2 とおくと

$$E_2 = (2x+1)^2 - 4(x^2 + y) = 4x - 4y + 1$$

となるため、 $E_2 \geq 0 \Leftrightarrow y \leq x + \frac{1}{4}$ が求める不等式である。

(3)

以下の図の斜線部分の面積を求めれば良い。



2つのグラフの交点の x 座標を α, β ($\alpha < \beta$)とおく。 α, β は

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x^2 &= x + \frac{1}{4} \\ \Leftrightarrow 2x^2 - 4x - 1 &= 0 \end{aligned}$$

の2解である。解と係数の関係より、 $\alpha + \beta = 2, \alpha\beta = -\frac{1}{2}$ である。よって、

$$\begin{aligned} (\beta - \alpha)^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta \\ &= 6 \\ \Leftrightarrow \beta - \alpha &= \sqrt{6} \quad (\because \alpha < \beta) \end{aligned}$$

である。よって求める面積は、

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} \left\{ \left(x + \frac{1}{4} \right) - \frac{1}{2}x^2 \right\} dx &= -\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{6} \right) \cdot (\beta - \alpha)^3 \\ &= \frac{\sqrt{6}}{2} \end{aligned}$$

である。

(1)

$$3 - |2 \cdot (-x) + 1| - |2 \cdot (-x) - 1| = 3 - |2x - 1| - |2x + 1|$$

より $y = 3 - |2x + 1| - |2x - 1|$ のグラフは y 軸について対称である。よって、 $x \geq 0$ の部分で考える。

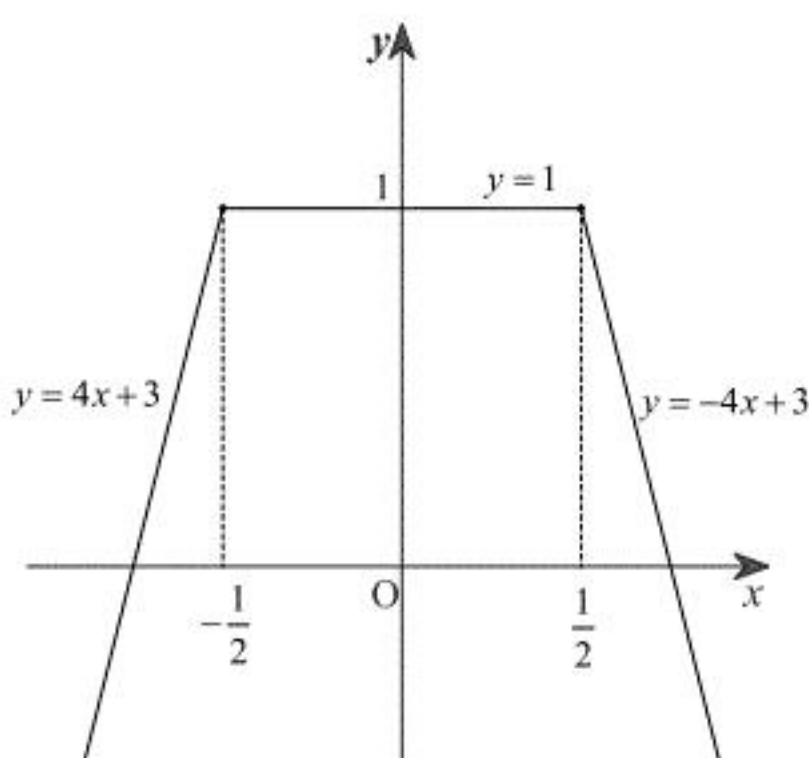
[1] $x \geq \frac{1}{2}$ のとき

$2x + 1 \geq 0, 2x - 1 \geq 0$ より、与えられた式は $y = 3 - (2x + 1) - (2x - 1) = -4x + 3$ となる。

[2] $0 \leq x < \frac{1}{2}$ のとき

$2x + 1 \geq 0, 2x - 1 < 0$ より、与えられた式は $y = 3 - (2x + 1) + (2x - 1) = 1$ となる。

以上、[1], [2]より、 y 軸対称であることを考慮すると $y = 3 - |2x + 1| - |2x - 1|$ のグラフは以下の図のようになる。



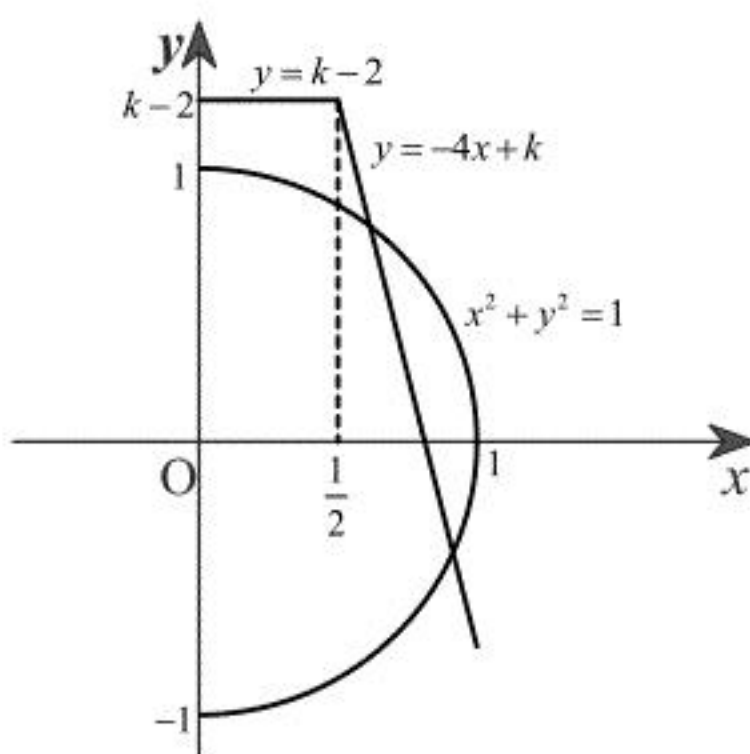
(答) 上図

(2)

$y + |2x + 1| + |2x - 1| = k$ とおく。よって、

$$y = k - |2x + 1| - |2x - 1|$$

と変形できるので、 $y = k - |2x + 1| - |2x - 1|$ のグラフは $y = 3 - |2x + 1| - |2x - 1|$ のグラフを y 軸方向に $k - 3$ 平行移動したものである。また、(1)より $y = k - |2x + 1| - |2x - 1|$ のグラフは y 軸について対称であるため $x \geq 0$ の部分で考える。 $x^2 + y^2 = 1$ と $y = k - |2x + 1| - |2x - 1|$ のグラフの $x \geq 0$ の部分を図示すると以下のようになる。



$x^2 + y^2 = 1$ と $y = k - |2x + 1| - |2x - 1|$ が $x \geq 0$ の部分で共有点をもつときの k の値の最大値、最小値を考える。上図より、 k の値が最小となるのは、 $y = k - 2$ が $x^2 + y^2 = 1$ と $y < 0$ の部分で接する、つまり、 $y = k - 2$ が点 $(0, -1)$ を通るときである。このとき、 k は最小値 1 をとる。 k の値が最大となるのは、 $y = k - 2$ が $x^2 + y^2 = 1$ と $y > 0$ の部分で接するとき、または、 $y = -4x + k$ が $x^2 + y^2 = 1$ と接するときである。 $y = k - 2$ が $x^2 + y^2 = 1$ と $y > 0$ の部分で接するとき、 $y = k - 2$ は点 $(0, 1)$ を通るので、 $k = 3$ となる。 $y = -4x + k$ が $x^2 + y^2 = 1$ と接するとき、原点と直線 $4x + y - k = 0$ の距離が単位円の半径 1 に等しくなる。上図より $k > 0$ であるため、

$$\frac{|4 \cdot 0 + 1 \cdot 0 - k|}{\sqrt{4^2 + 1^2}} = 1 \Leftrightarrow k = \sqrt{17}$$

となる。また、このとき接点は 2 直線 $y = -4x + \sqrt{17}$, $y = \frac{1}{4}x$ の交点であるから、 y を消去して

$$-4x + \sqrt{17} = \frac{1}{4}x$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4\sqrt{17}}{17}$$

となり、 $(x, y) = \left(\frac{4\sqrt{17}}{17}, \frac{\sqrt{17}}{17} \right)$ となり、 $0 \leq \frac{4\sqrt{17}}{17} \leq 1$ をみたす。また、 $\sqrt{17} > 3$ より k は

$(x, y) = \left(\frac{4\sqrt{17}}{17}, \frac{\sqrt{17}}{17} \right)$ のとき最大値 $\sqrt{17}$ をとる。グラフが y 軸について対称であることを考

慮すると、 $(x, y) = \left(-\frac{4\sqrt{17}}{17}, \frac{\sqrt{17}}{17} \right)$ のときも最大値をとる。

(答) $(x, y) = (0, -1)$ のとき最小値 1, $(x, y) = \left(\pm \frac{4\sqrt{17}}{17}, \frac{\sqrt{17}}{17} \right)$ のとき最大値 $\sqrt{17}$