

【解答】

最小値 $= \frac{4}{3}$	$(x, y) = \left(\frac{5}{3}, -\frac{1}{3} \right)$
---------------------	---

【解説】

実数 k を用いて $x+y=k$ とおく。 $(x+2y)(x-y)=2$ に $y=k-x$ を代入すると、

$$\{x+2(k-x)\}\{x-(k-x)\}=2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 5kx + 2k^2 + 2 = 0$$

となる。 $f(x) = 2x^2 - 5kx + 2k^2 + 2$ とおく。 $f(x) = 0$ が $x > 0$ を満たす実数解をもつような k の範囲を求める。 $f(x) = 0$ の判別式を D とおくと、

$$\begin{aligned} D &= (5k)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (2k^2 + 2) \\ &= 9k^2 - 16 \end{aligned}$$

である。また、放物線 $y = f(x)$ の軸は $x = \frac{5}{4}k$ である。 $f(x) = 0$ が $x > 0$ を満たす解をもつのは、

$$f(0) < 0 \text{ または } \begin{cases} D \geq 0 \\ \frac{5}{4}k > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 2k^2 + 2 < 0 \text{ または } \begin{cases} 9k^2 - 16 \geq 0 \\ k > 0 \end{cases}$$

$$\therefore k \geq \frac{4}{3}$$

のときである。 $k = \frac{4}{3}$ のとき、 $f(x) = 2x^2 - \frac{20}{3}x + \frac{50}{9}$ より、

$$f(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - \frac{10}{3}x + \frac{25}{9} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{5}{3}\right)^2 = 0$$

$$\therefore x = \frac{5}{3}$$

となる。このとき、

$$y = k - x = -\frac{1}{3}$$

である。したがって、 $x+y$ の最小値は $\frac{4}{3}$ であり、最小値を与える x と y は $(x, y) = \left(\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

である。

(1)

5回目にAさんに出た目を x 、Bさんに出た目を y とおく。5回目のさいころの目の出方は $6 \cdot 6 = 36$ (通り)であり、これらは同様に確からしい。二人とも5回目を投げ終えた時点でのAさんに出た目の平均値は、

$$\frac{2+6+4+1+x}{5} = \frac{x+13}{5}$$

であり、Bさんに出た目の平均値は、

$$\frac{5+3+4+2+y}{5} = \frac{y+14}{5}$$

である。よって、二人とも5回目を投げ終えた時点で、Aさんに出た目の平均値が、Bさんに出た目の平均値以上となる条件は、

$$\begin{aligned} \frac{x+13}{5} &\geq \frac{y+14}{5} \\ \Leftrightarrow x &\geq y+1 \end{aligned}$$

であり、そのような目の出方は、

$$\begin{aligned} (x, y) = & (2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), \\ & (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5) \end{aligned}$$

の15通りである。ゆえに、求める確率は、 $\frac{15}{36} = \frac{5}{12}$ となる。

(答) $\frac{5}{12}$

(2)

各 x, y の値に対する、二人とも5回目を投げ終えた時点でのAさん、Bさんに出た目の中央値は次の表のようになる。

x	1	2	3	4	5	6
Aさんに出た目の中央値	2	2	3	4	4	4

y	1	2	3	4	5	6
Bさんに出た目の中央値	3	3	3	4	4	4

よって、Aさんに出た目の中央値が、Bさんに出た目の中央値以上となる x, y の値は、 $x=3$ のとき、 $y=1, 2, 3$ であり、 $x=4, 5, 6$ のとき、 $y=1, 2, 3, 4, 5, 6$ である。したがって、そのよ

うな (x, y) の組は21通りである。ゆえに、求める確率は、 $\frac{21}{36} = \frac{7}{12}$ となる。

(答) $\frac{7}{12}$

【解答】

(1)	$n = 99$	(2)	2	(3)	2
-----	----------	-----	---	-----	---

【解説】

(1)

48^n が 10^{166} と 10^{167} の間の整数となるのは、

$$10^{166} \leq 48^n < 10^{167}$$

$$\Leftrightarrow 166 \leq n \log_{10} 48 < 167 \quad (\because \text{底 } 10 > 1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{166}{\log_{10} 48} \leq n < \frac{167}{\log_{10} 48}$$

のときである。ここで、

$$\log_{10} 48 = \log_{10} (2^4 \cdot 3) = 4 \log_{10} 2 + \log_{10} 3 = 1.681$$

である。

$$\frac{166}{\log_{10} 48} = \frac{166}{1.681} = 98.7 \dots$$

$$\frac{167}{\log_{10} 48} = \frac{167}{1.681} = 99.3 \dots$$

であるから、 n は自然数より、 $n = 99$ である。

(2)

$$\log_{10} 48^{99} = 99 \log_{10} 48 = 99 \cdot 1.681 = 166.419$$

である。 $\log_{10} 2 < 0.419 < \log_{10} 3$ であるから、

$$166 + \log_{10} 2 < \log_{10} 48^{99} < 166 + \log_{10} 3$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot 10^{166} < 48^{99} < 3 \cdot 10^{166}$$

となる。よって、 48^{99} の最高位の数字は 2 である。

(3)

各 n の値に対して、 48^n の一の位の数字は以下ようになる。

n	1	2	3	4	5	...
48^n の一の位の数字	8	4	2	6	8	...

したがって、 48^n の一の位は周期が 4 である。 $99 = 4 \cdot 24 + 3$ より、 48^{99} の一の位の数字は 48^3 の一の位の数字と一致し、その値は 2 である。

(1)

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \int_0^x (3t^2 + 2xt + 6) dt - \frac{15}{2}x^2 \\
 &= \left[t^3 + xt^2 + 6t \right]_0^x - \frac{15}{2}x^2 \\
 &= 2x^3 - \frac{15}{2}x^2 + 6x
 \end{aligned}$$

となる。

$$(答) f(x) = 2x^3 - \frac{15}{2}x^2 + 6x$$

(2)

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 6x^2 - 15x + 6 \\
 &= 3(2x - 1)(x - 2)
 \end{aligned}$$

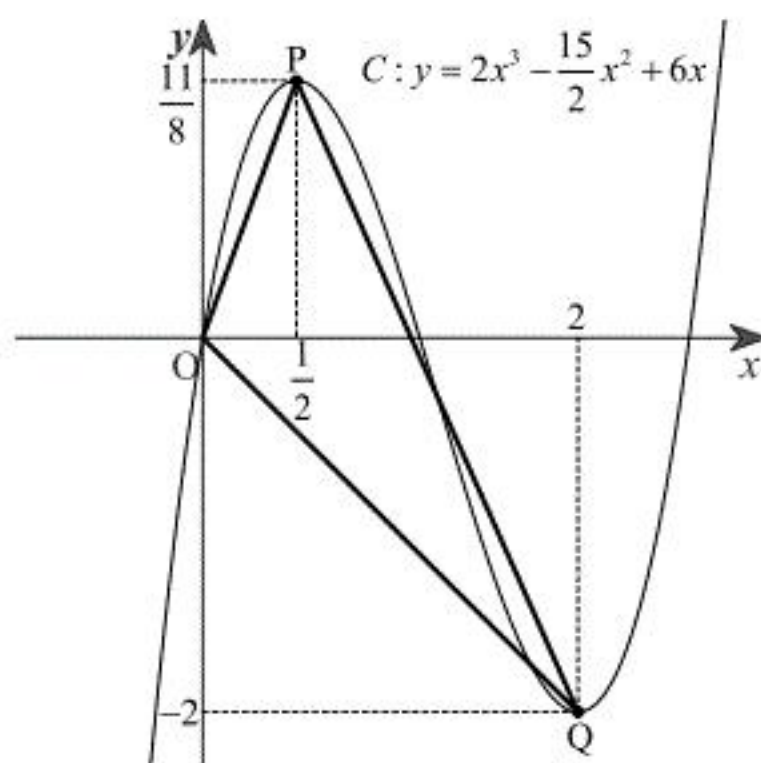
であるから、 $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	...	$\frac{1}{2}$	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{11}{8}$	$\searrow$	-2	$\nearrow$

よって、 $x = \frac{1}{2}$ のとき極大値 $\frac{11}{8}$ 、 $x = 2$ のとき極小値-2をとる。

$$(答) \text{ 極大値 } \frac{11}{8} \left(x = \frac{1}{2} \right), \text{ 極小値 } -2 \left(x = 2 \right)$$

(3)



$P\left(\frac{1}{2}, \frac{11}{8}\right)$, $Q(2, -2)$ より、 $\triangle OPQ$ の面積は、

$$\begin{aligned}
 \triangle OPQ &= \frac{1}{2} \left| 2 \cdot \frac{11}{8} - \frac{1}{2} \cdot (-2) \right| \\
 &= \frac{15}{8}
 \end{aligned}$$

である。

$$(答) \frac{15}{8}$$