

〔解答〕

(1)	$\frac{103}{108}$
(2)	$\frac{1}{3}$

〔解説〕

(1)

$a+b+c < 6$ となる a, b, c の組を求めると、

$$\{1, 1, 1\}, \{1, 1, 2\}, \{1, 1, 3\}, \{1, 2, 2\}$$

である。したがって、 $a+b+c \geq 6$ である事象は $a+b+c < 6$ である事象の余事象であるから、求める確率は

$$1 - \frac{1+3+3+3}{216} = \frac{103}{108}$$

となる。

(2)

abc が10の倍数となるときの余事象を考える。 abc が10の倍数とならないとき、 a, b, c のいずれも5ではない場合と a, b, c のうち少なくとも1つは5となる場合に分けて考えられる。

[1] a, b, c のいずれも5ではない場合

このとき abc は10の倍数とならず、場合の数は

$$5^3 = 125 \text{ (通り)}$$

である。

[2] a, b, c のうち少なくとも1つは5となる場合

このときの abc が10の倍数とならない a, b, c の組を求めると、

$$\{5, 5, 5\}, \{5, 5, 3\}, \{5, 5, 1\}, \{5, 3, 3\}, \{5, 3, 1\}, \{5, 1, 1\}$$

である。したがって、このときの場合の数は

$$1+3+3+3+6+3=19 \text{ (通り)}$$

となる。

以上より、[1], [2]は互いに排反の事象であるから、 abc が10の倍数となる確率は

$$1 - \frac{125+19}{216} = \frac{1}{3}$$

となる。

$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x-2)(x+2)$$

より、 $y = f(x)$ ($0 \leq x \leq 5$) の増減表は以下のようになる。

x	0	...	2	...	5
$f'(x)$	-	-	0	+	+
$f(x)$	$f(0)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$	$f(5)$

上表より $f(x)$ は $x=2$ で極小値をとり、

$$f(0) = -4a, f(2) = -4a - 16, f(5) = -4a + 65$$

であるから、 $0 \leq x \leq 5$ において $f(x)$ の最小値は $f(2) = -4a - 16$ 、最大値は $f(5) = -4a + 65$ となる。また、

$$g(x) = -\frac{1}{4}(x-4)^2 + a + 4$$

より、

$$g(0) = a, g(4) = a + 4, g(5) = a + \frac{15}{4}$$

であるから、 $0 \leq x \leq 5$ において $g(x)$ の最小値は $g(0) = a$ 、最大値は $g(4) = a + 4$ となる。ここで、 $0 \leq x \leq 5$ において常に $f(x)g(x) < 0$ となるのは $f(x) < 0$ かつ $g(x) > 0$ となる場合、または $f(x) > 0$ かつ $g(x) < 0$ となる場合であり、それぞれについての a の条件を考える。

[1] $f(x) < 0$ かつ $g(x) > 0$ となる場合

$f(5) < 0$ かつ $g(0) > 0$ となればよいから、題意を満たす a の範囲は、

$$\begin{cases} -4a + 65 < 0 \\ a > 0 \end{cases}$$

$$\therefore \frac{65}{4} < a$$

となる。

[2] $f(x) > 0$ かつ $g(x) < 0$ となる場合

$f(2) > 0$ かつ $g(4) < 0$ となればよいから、題意を満たす a の範囲は、

$$\begin{cases} -4a - 16 > 0 \\ a + 4 < 0 \end{cases}$$

$$\therefore a < -4$$

となる。

以上[1], [2]より、題意を満たす a の範囲は

$$a < -4 \text{ または } \frac{65}{4} < a$$

となる。

(答) $a < -4$ または $\frac{65}{4} < a$

〔解答〕

(1)	$\frac{1}{2}(\sqrt{4n+3}-\sqrt{2n+1})$
(2)	55

〔解説〕

(1)

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{\sqrt{2k+3} + \sqrt{2k+1}} \\
 &= \sum_{k=n}^{2n} \frac{\sqrt{2k+3} - \sqrt{2k+1}}{(\sqrt{2k+3} + \sqrt{2k+1})(\sqrt{2k+3} - \sqrt{2k+1})} \\
 &= \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{2}(\sqrt{2k+3} - \sqrt{2k+1}) \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ (\sqrt{4n+3} - \sqrt{4n+1}) + (\sqrt{4n+1} - \sqrt{4n-1}) + \cdots + (\sqrt{2n+5} - \sqrt{2n+3}) + (\sqrt{2n+3} - \sqrt{2n+1}) \right\} \\
 &= \frac{1}{2}(\sqrt{4n+3} - \sqrt{2n+1})
 \end{aligned}$$

となる。

(2)

a, b, c を $a+b+c=10$ を満たす 0 以上の整数とすると、多項定理より、 $(x^2+x+1)^{10}$ を展開し

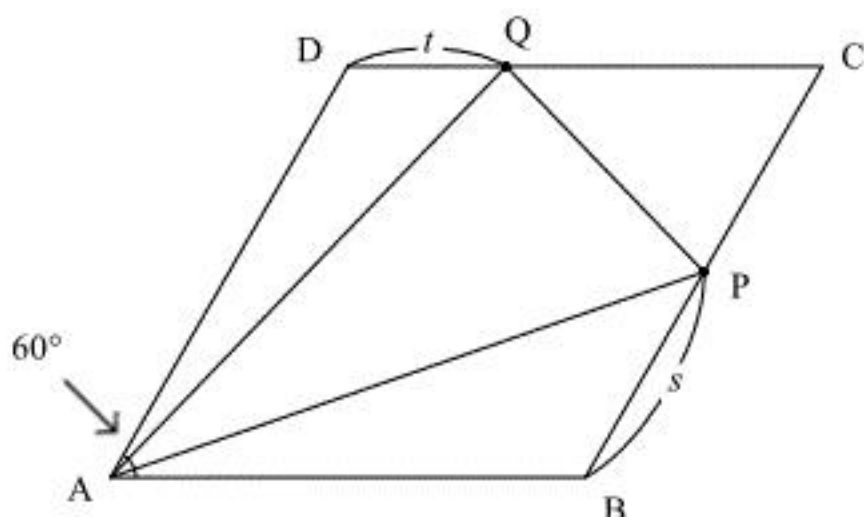
た式の項はそれぞれ $\frac{10!}{a!b!c!}x^{2a+b}$ と表される。 $2a+b=18$ かつ $a+b+c=10$ を満たす a, b, c の

組は $(a, b, c) = (9, 1, 0), (8, 2, 0)$ の 2 組のみであるから、

$$\frac{10!}{9!1!} + \frac{10!}{8!2!} = 10 + 45 = 55$$

より、求める x^{18} の係数は 55 となる。

(1)



上図より、 $\triangle APQ$ の面積はひし形 ABCD の面積から $\triangle ABP$, $\triangle ADQ$, $\triangle CPQ$ の面積を引いたものであるから、 $\triangle APQ$ の面積は

$$\begin{aligned}
 & (\text{ひし形 } ABCD) - \triangle ABP - \triangle ADQ - \triangle CPQ \\
 &= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin \angle A - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot s \cdot \sin \angle B - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot t \cdot \sin \angle D - \frac{1}{2} \cdot (1-s)(1-t) \sin \angle C \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{4} \{2 - s - t - (1-s-t+st)\} \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{4} (1-st)
 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{\sqrt{3}}{4} (1-st)$$

(2)

P, Q が $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ} = 2$ を満たすとき

$$\begin{aligned}
 & \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ} = 2 \\
 & \Leftrightarrow \left(1 + \frac{s}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}s\right) \cdot \left(\frac{1}{2} + t, \frac{\sqrt{3}}{2}t\right) = 2 \\
 & \Leftrightarrow \frac{1}{2} + t + s + \frac{1}{2}st = 2 \\
 & \Leftrightarrow s(2+t) = 3-2t \\
 & \therefore s = \frac{3-2t}{t+2} \quad (\because t+2 > 0)
 \end{aligned}$$

が成り立つ。これを $\triangle APQ$ の面積に代入すると、 $0 \leq t \leq 1$ であり $t+2 \geq 0$ となるから、相加平均・相乗平均の不等式より

$$\begin{aligned}
 \frac{\sqrt{3}}{4} \left\{1 - \left(\frac{3-2t}{t+2}\right)t\right\} &= \frac{\sqrt{3}}{4} \left(1 - \frac{-2t^2+3t}{t+2}\right) \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{4} \left\{1 - \frac{-2(t+2)^2+11t+8}{t+2}\right\} \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{2} \left\{(t+2) + \frac{7}{t+2} - 5\right\} \\
 &\geq \frac{\sqrt{3}}{2} \left(2\sqrt{(t+2) \cdot \frac{7}{t+2}} - 5\right) \\
 &= \frac{1}{2} (2\sqrt{21} - 5\sqrt{3})
 \end{aligned}$$

と $\triangle APQ$ の面積の最小値が求まる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{2} (2\sqrt{21} - 5\sqrt{3})$$