

〔解答〕

$$(1) \quad x = 2^{3+\sqrt{17}} \quad (2) \quad x = \frac{-1-\sqrt{13}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

〔解説〕

(1)

真数条件より

$$x > 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

である。ここで、与式の対数の底を 2 に揃えると

$$\begin{aligned} & (\log_4 x) \left(\log_{\sqrt{2}} \sqrt{x} \right) - \left(\log_8 x^3 \right)^2 + \log_2 (8x^3) + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{\log_2 x}{\log_2 4} \cdot \frac{\log_2 \sqrt{x}}{\log_2 \sqrt{2}} - \left(\frac{\log_2 x^3}{\log_2 8} \right)^2 + \log_2 8 + \log_2 x^3 + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{2} (\log_2 x)^2 - (\log_2 x)^2 + 3 + 3 \log_2 x + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow & -\frac{1}{2} (\log_2 x)^2 + 3 \log_2 x + 4 = 0 \end{aligned}$$

となるため、 $t = \log_2 x$ においてこの方程式を解くと

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} t^2 + 3t + 4 = 0 \\ \Leftrightarrow & t^2 - 6t - 8 = 0 \\ \Leftrightarrow & t = 3 \pm \sqrt{17} \end{aligned}$$

となる。ゆえに、求める実数 x の値は

$$\begin{aligned} & \log_2 x = 3 \pm \sqrt{17} \\ \Leftrightarrow & x = 2^{3 \pm \sqrt{17}} \end{aligned}$$

と求められ、これらはいずれも $\textcircled{1}$ に適する。

(2)

$$|x^2 - 2| = \begin{cases} x^2 - 2 & (x < -\sqrt{2}, \sqrt{2} \leq x \text{ のとき}) \\ 2 - x^2 & (-\sqrt{2} \leq x < \sqrt{2} \text{ のとき}) \end{cases}$$

であるから、以下、 x の範囲で場合分けして考える。[1] $x < -\sqrt{2}, \sqrt{2} \leq x$ のときこのとき、与式を x について解くと

$$\begin{aligned} & x^2 - 2 = 1 - x \\ \Leftrightarrow & x^2 + x - 3 = 0 \\ \Leftrightarrow & x = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $3.6 < \sqrt{13} < 3.7$ より、

$$\begin{aligned} & 1.3 < \frac{-1 + \sqrt{13}}{2} < 1.35 (< \sqrt{2}) \\ & -2.35 < \frac{-1 - \sqrt{13}}{2} < -2.3 (< -\sqrt{2}) \end{aligned}$$

であるから、満たす実数 x は

$$x = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2}$$

である。

[2] $-\sqrt{2} \leq x < \sqrt{2}$ のときこのとき、与式を x について解くと

$$\begin{aligned} & 2 - x^2 = 1 - x \\ \Leftrightarrow & x^2 - x - 1 = 0 \\ \Leftrightarrow & x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $2 < \sqrt{5} < 3$ より、

$$\begin{aligned} & (\sqrt{2} <) 1.5 < \frac{1 + \sqrt{5}}{2} < 2 \\ & (-\sqrt{2} <) -1 < \frac{1 - \sqrt{5}}{2} < -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

であるから、満たす実数 x は

$$x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

である。

以上、[1], [2] より求める実数 x は、

$$x = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2}, \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

である。

(1)

$$3\overrightarrow{PA} + 4\overrightarrow{PC} + 5\overrightarrow{PB} = \vec{0}$$

の全てのベクトルの始点を点Oに揃えて変形すると、

$$3(\vec{a} - \overrightarrow{OP}) + 4(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OP}) + 5(\vec{b} - \overrightarrow{OP}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 3\vec{a} + 5\vec{b} + 4\overrightarrow{OC} - 12\overrightarrow{OP} = \vec{0}$$

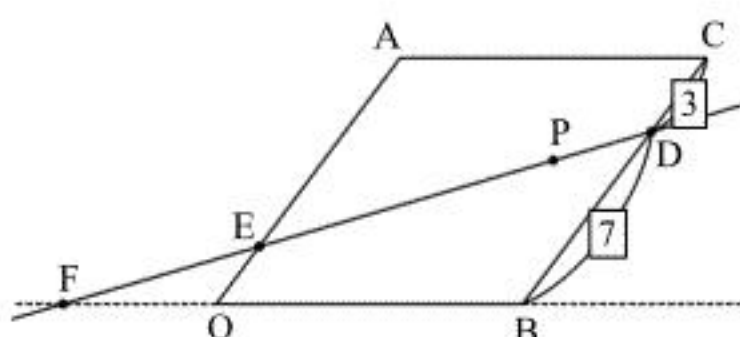
$$\Leftrightarrow 12\overrightarrow{OP} = 3\vec{a} + 5\vec{b} + 4(\vec{a} + \vec{b})$$

$$\therefore \overrightarrow{OP} = \frac{7}{12}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OP} = \frac{7}{12}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}$$

(2)



$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BC}$ であり、点Dは辺BCを7:3に内分した点であるから、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OD} &= \overrightarrow{OB} + \frac{7}{10}\overrightarrow{BC} \\ &= \frac{7}{10}\vec{a} + \vec{b} \end{aligned}$$

となる。ここで、直線DP上の点を点Xとおくと、実数 t を用いて

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OX} &= (1-t)\overrightarrow{OP} + t\overrightarrow{OD} \\ &= (1-t)\left(\frac{7}{12}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}\right) + t\left(\frac{7}{10}\vec{a} + \vec{b}\right) \\ &= \frac{7}{60}(t+5)\vec{a} + \frac{1}{4}(t+3)\vec{b} \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

と表せる。 $\frac{1}{4}(t+3)=0$ すなわち $t=-3$ のとき、①は $\overrightarrow{OX} = \frac{7}{30}\vec{a}$ となるから、点Xは直線OA上

にある。ゆえに、 $\overrightarrow{OE} = \frac{7}{30}\vec{a}$ であるから

$$OE:EA = 7:23$$

である。

$$(\text{答}) \quad OE:EA = 7:23$$

(3)

(2)より、 $OE = \frac{7}{30}OA = 7$ である。また、 $\frac{7}{60}(t+5)=0$ すなわち $t=-5$ のとき、①は $\overrightarrow{OX} = -\frac{1}{2}\vec{b}$

となるから、点Xは直線OB上にある。ゆえに、 $\overrightarrow{OF} = -\frac{1}{2}\vec{b}$ である。したがって、

$OF = \frac{1}{2}OB = 15$ である。また、 $\angle AOB = \theta$ ($0 < \theta < \pi$) とおくと、条件より、

$$\cos \theta = \frac{3}{5}$$

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5} \quad (\because 0 < \theta < \pi)$$

となる。ここで $\triangle OEF$ において余弦定理を用いると

$$\begin{aligned} EF^2 &= OE^2 + OF^2 - 2 \cdot OE \cdot OF \cdot \cos \angle EOF \\ &= 7^2 + 15^2 - 2 \cdot 7 \cdot 15 \cdot \cos(\pi - \theta) \\ &= 274 - 210 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) \\ &= 400 \end{aligned}$$

となるから、 $EF = 20$ である。 $\triangle OEF$ の内接円の半径を r とおくと、 $\triangle OEF$ の面積を2通りで表すことにより

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}r(OE + OF + EF) &= \frac{1}{2} \cdot OE \cdot OF \cdot \sin \angle EOF \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}r(7 + 15 + 20) &= \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 15 \cdot \sin(\pi - \theta) \\ \Leftrightarrow 21r &= \frac{105}{2} \cdot \frac{4}{5} \\ \therefore r &= 2 \end{aligned}$$

と求められる。

$$(\text{答}) \quad r = 2$$

〔解答〕

$$(1) \quad \tan \theta = \frac{1}{8} \quad (2) \quad x = \sqrt{3+2\sqrt{3}}$$

〔解説〕

(1)

x 軸の正方向と $y=5x$ のなす角を θ_1 , x 軸の正方向と $y=3x$ のなす角を θ_2 とおくと

$$\theta = \theta_1 - \theta_2$$

$$\tan \theta_1 = 5$$

$$\tan \theta_2 = 3$$

である。ゆえに、

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \tan(\theta_1 - \theta_2) \\ &= \frac{\tan \theta_1 - \tan \theta_2}{1 + \tan \theta_1 \tan \theta_2} \\ &= \frac{5-3}{1+5 \cdot 3} \\ &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

となる。

(2)

関数 $y = \sqrt{x + \frac{1}{x}}$ の定義域は

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{x} &\geq 0 \\ \Leftrightarrow x &> 0 \end{aligned}$$

である。

$$y = \sqrt{x + \frac{1}{x}} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$$

より、 y' と y'' を求めると

$$y' = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$$

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \left(x + \frac{1}{x}\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{2}{x^3} \\ &= \frac{-x^3 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^2 + 4 \left(x + \frac{1}{x}\right)}{4x^3 \left(x + \frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{2}}} \\ &= -\frac{x^4 - 6x^2 - 3}{4x^4 \left(x + \frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $y'' = 0$ となるとき、

$$y'' = 0$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 6x^2 - 3 = 0 \left(\because 4x^4 \left(x + \frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{2}} > 0 \right)$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 3 \pm 2\sqrt{3}$$

$$\therefore x = \sqrt{3+2\sqrt{3}} \left(\because 3-2\sqrt{3} < 0, x > 0 \right)$$

である。ゆえに、 $y = \sqrt{x + \frac{1}{x}}$ の $x > 0$ における増減表は以下の通りである。

x	0	...	1	...	$\sqrt{3+2\sqrt{3}}$	...
y'		-	0	+	+	+
y''		+	+	+	0	-
y		↘		↗		↗

よって、 $x = \sqrt{3+2\sqrt{3}}$ の前後で確かに y'' の符号変化が起こるため、これが求める P の x 座標である。

(1)

$x - \log t = 0$ を t について解くと $t = e^x$ であるため、

$$|x - \log t| = \begin{cases} x - \log t & (1 \leq t < e^x \text{ のとき}) \\ \log t - x & (e^x \leq t \leq e \text{ のとき}) \end{cases}$$

である。ゆえに

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_1^e |x - \log t| dt \\ &= \int_1^{e^x} (x - \log t) dt + \int_{e^x}^e (\log t - x) dt \\ &= [xt - t \log t]_1^{e^x} + \int_1^{e^x} t \cdot \frac{1}{t} dt + [t \log t - xt]_{e^x}^e - \int_{e^x}^e t \cdot \frac{1}{t} dt \\ &= (xe^x - xe^x) - x + [t]_1^{e^x} + (e - ex) - (xe^x - xe^x) - [t]_{e^x}^e \\ &= 2e^x - (e+1)x - 1 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad f(x) = 2e^x - (e+1)x - 1$$

(2)

$f(x) = 2e^x - (e+1)x - 1$ より、

$$f'(x) = 2e^x - (e+1)$$

である。したがって、

$$f'(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \log\left(\frac{e+1}{2}\right)$$

である。 $0 < \log\left(\frac{e+1}{2}\right) < 1$ より、 $0 \leq x \leq 1$ における $f(x)$ の増減表は以下の通りになる。

x	0	...	$\log\left(\frac{e+1}{2}\right)$	...	1
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	1	$\searrow$		$\nearrow$	$e-2$

ゆえに $f(x)$ は $x = \log\left(\frac{e+1}{2}\right)$ のとき最小値を取り、その最小値は

$$\begin{aligned} f\left(\log\left(\frac{e+1}{2}\right)\right) &= 2 \cdot \frac{e+1}{2} - (e+1) \cdot \log \frac{e+1}{2} - 1 \\ &= e - (e+1) \log \frac{e+1}{2} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \text{最小値 } e - (e+1) \log \frac{e+1}{2} \quad (x = \log\left(\frac{e+1}{2}\right) \text{ のとき})$$