

【解答】

(1)	$\cos A = -\frac{1}{15}$	(2)	$R = \frac{45\sqrt{14}}{56}$	(3)	$r = \frac{2\sqrt{14}}{7}$
-----	--------------------------	-----	------------------------------	-----	----------------------------

【解説】

(1)

三角形 ABC において、余弦定理を用いると、

$$\begin{aligned}\cos A &= \frac{AB^2 + CA^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot CA} \\ &= \frac{9 + 25 - 36}{2 \cdot 3 \cdot 5} \\ &= -\frac{1}{15}\end{aligned}$$

となる。

(2)

(1)より、

$$\begin{aligned}\sin A &= \sqrt{1 - \cos^2 A} \quad (\because 0^\circ < A < 180^\circ) \\ &= \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{15}\right)^2} \\ &= \frac{4\sqrt{14}}{15}\end{aligned}$$

である。よって、三角形 ABC において、正弦定理を用いると、

$$\begin{aligned}\frac{BC}{\sin A} &= 2R \\ \Leftrightarrow \frac{6}{\frac{4\sqrt{14}}{15}} &= 2R \\ \therefore R &= \frac{45\sqrt{14}}{56}\end{aligned}$$

となる。

(3)

三角形 ABC の面積を S とすると、

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CA \cdot \sin A \\ &= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5 \cdot \frac{4\sqrt{14}}{15} \\ &= 2\sqrt{14}\end{aligned}$$

である。また、 S は

$$S = \frac{1}{2}(AB + BC + CA)r$$

と表すことができるから、

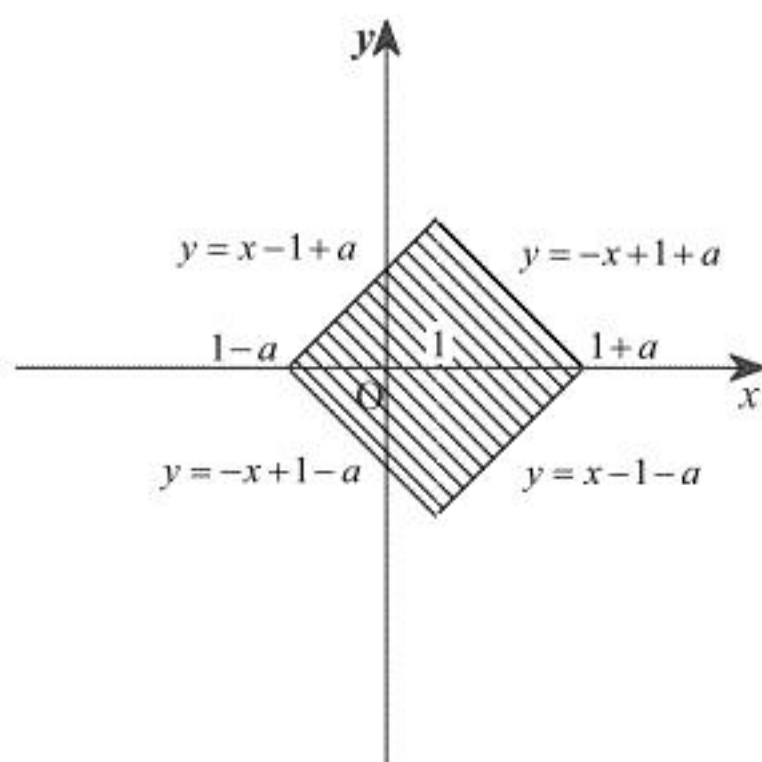
$$\begin{aligned}2\sqrt{14} &= \frac{1}{2}(AB + BC + CA)r \\ \Leftrightarrow 2\sqrt{14} &= \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot r \\ \therefore r &= \frac{2\sqrt{14}}{7}\end{aligned}$$

と求められる。

領域 A, B を図示する。まず領域 A について、

$$\begin{aligned}
 &|x-1|+|y|\leq a \\
 \Leftrightarrow &\begin{cases} x-1+y\leq a & (0\leq x-1, 0\leq y) \\ x-1-y\leq a & (0\leq x-1, y<0) \\ -(x-1)+y\leq a & (x-1<0, 0\leq y) \\ -(x-1)-y\leq a & (x-1<0, y<0) \end{cases} \\
 \Leftrightarrow &\begin{cases} y\leq -x+1+a & (1\leq x, 0\leq y) \\ y\geq x-1-a & (1\leq x, y<0) \\ y\leq x-1+a & (x<1, 0\leq y) \\ y\geq -x+1-a & (x<1, y<0) \end{cases}
 \end{aligned}$$

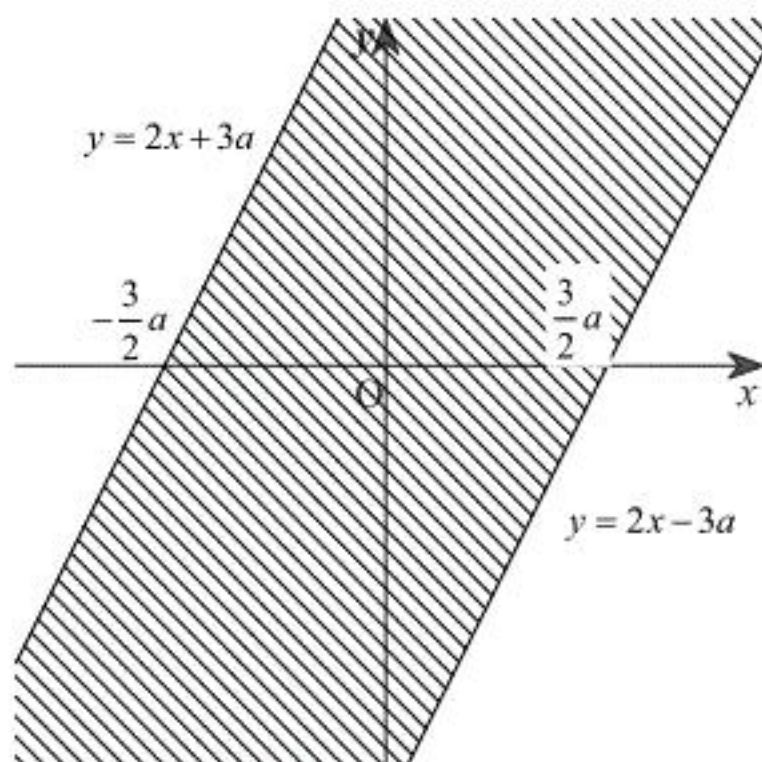
であるから、下のように図示できる。



また、領域 B も同様にすると、

$$\begin{aligned}
 &|y-2x|\leq 3a \\
 \Leftrightarrow &\begin{cases} y-2x\leq 3a & (y>2x) \\ -(y-2x)\leq 3a & (y\leq 2x) \end{cases} \\
 \Leftrightarrow &\begin{cases} y\leq 2x+3a & (y>2x) \\ y\geq 2x-3a & (y\leq 2x) \end{cases}
 \end{aligned}$$

であるから、下のように図示できる。



上の図より、領域 A の境界の正方形の頂点、すなわち $(1+a, 0)$, $(1-a, 0)$, $(1, a)$, $(1, -a)$ のすべてが領域 B に含まれるような a の範囲を求めればよい。 $y = 2x \pm 3a$ の傾きは $y = x-1 \pm a$ の傾きよりも大きいため、点 $(1+a, 0)$, $(1-a, 0)$ が領域 B に含まれるとき、点 $(1, -a)$, $(1, a)$ も領域 B に含まれる。したがって、領域 A が領域 B に含まれるのは、

$$-\frac{3}{2}a \leq 1-a \text{ かつ } 1+a \leq \frac{3}{2}a$$

$$\Leftrightarrow a \geq -2 \text{ かつ } a \geq 2$$

$$\therefore a \geq 2$$

のときである。

(答) $a \geq 2$

【解答】

(1)	$\alpha = \frac{1-\sqrt{3}}{2} \quad \beta = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$	(2)	$a = -1 \quad b = -\frac{1}{4}$
-----	--	-----	---------------------------------

【解説】

(1)

$$\begin{aligned}(x-\alpha)^2(x-\beta)^2 &= (x^2-2\alpha x+\alpha^2)(x^2-2\beta x+\beta^2) \\ &= x^4-2(\alpha+\beta)x^3+(\alpha^2+4\alpha\beta+\beta^2)x^2-(2\alpha\beta^2+2\alpha^2\beta)x+\alpha^2\beta^2\end{aligned}$$

である。 x^4-2x^3-ax-b を因数分解すると $(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$ となるから、

$$x^4-2x^3-ax-b = x^4-2(\alpha+\beta)x^3+(\alpha^2+4\alpha\beta+\beta^2)x^2-(2\alpha\beta^2+2\alpha^2\beta)x+\alpha^2\beta^2$$

と表すことができ、これは x の恒等式である。したがって、

$$\begin{cases} \alpha+\beta=1 \\ \alpha^2+4\alpha\beta+\beta^2=0 \end{cases}$$

である。ここで、

$$\begin{aligned}\alpha^2+4\alpha\beta+\beta^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (\alpha+\beta)^2+2\alpha\beta &= 0 \\ \Leftrightarrow 1^2+2\alpha\beta &= 0 \quad (\because \alpha+\beta=1) \\ \therefore \alpha\beta &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

であるから、解と係数の関係より、 α, β は u の2次方程式 $u^2-u-\frac{1}{2}=0$ の実数解である。これを解くと、

$$\begin{aligned}u^2-u-\frac{1}{2} &= 0 \\ \therefore u &= \frac{1\pm\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

であり、 $\alpha \leq \beta$ を考慮すると、 $\alpha = \frac{1-\sqrt{3}}{2}, \beta = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ と求められる。

(2)

(1)より、

$$\begin{cases} \alpha+\beta=1 \\ \alpha\beta=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

である。これと、(1)の恒等式を用いると、

$$\begin{aligned}\begin{cases} 2\alpha\beta^2+2\alpha^2\beta=a \\ \alpha^2\beta^2=-b \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha\beta(\alpha+\beta)=a \\ (\alpha\beta)^2=-b \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 1=a \\ \left(-\frac{1}{2}\right)^2=-b \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=-\frac{1}{4} \end{cases}\end{aligned}$$

と求められる。

(1)

L の傾きは $\frac{16-4}{4-(-2)}=2$ であるから、 L の方程式は、

$$y-16=2(x-4) \Leftrightarrow y=2x+8$$

である。

(答) $y=2x+8$

(2)

線分 AB の中点は $\left(\frac{(-2)+4}{2}, \frac{4+16}{2}\right)=(1, 10)$ である。また、 L に垂直な直線の傾きを m とすると、

$$m \cdot 2 = -1 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}$$

である。よって、 M の方程式は、

$$y-10 = -\frac{1}{2}(x-1) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{21}{2}$$

である。

(答) $y = -\frac{1}{2}x + \frac{21}{2}$

(3)

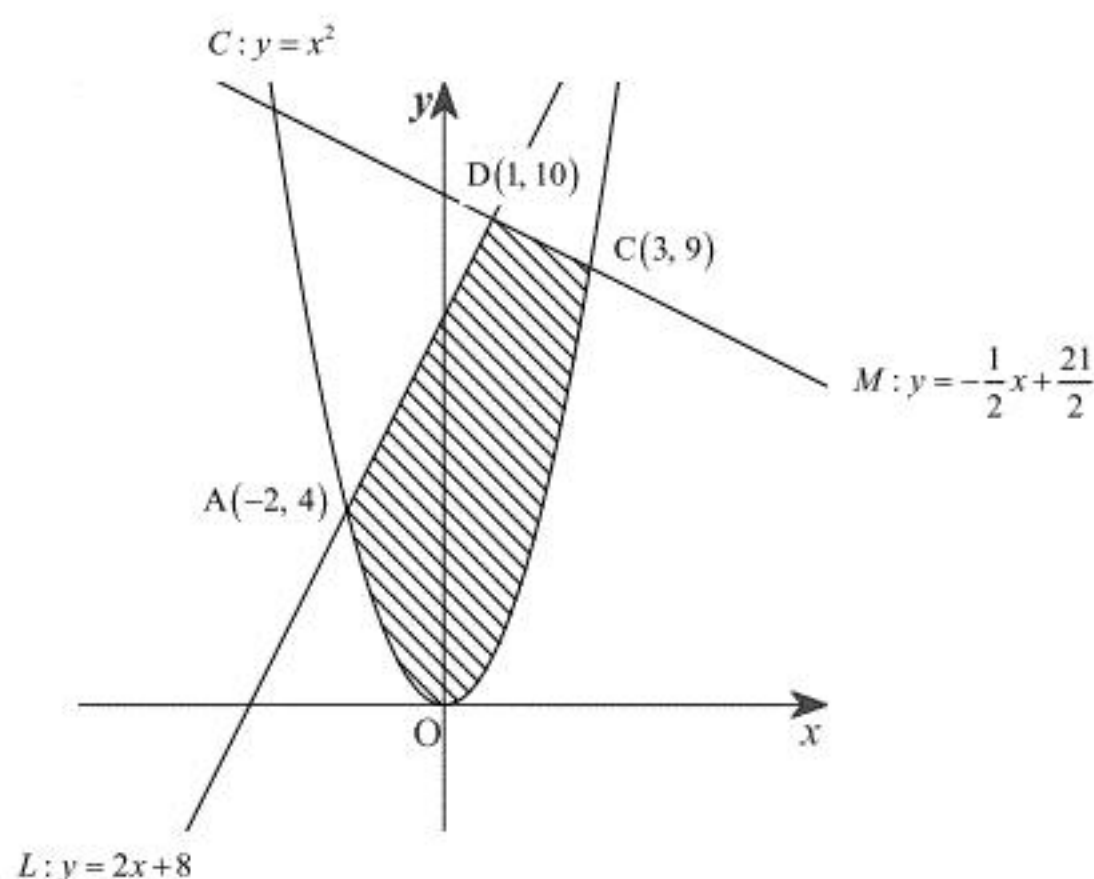
2つの直線は線分 AB の中点で交わるから、交点の座標は $(1, 10)$ である。また、 M と C の交点は、

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + \frac{21}{2} \\ y = x^2 \end{cases}$$

を解くと求められる。 y を消去して整理すると、

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{21}{2} &= 0 \\ \Leftrightarrow (2x+7)(x-3) &= 0 \\ \therefore x &= -\frac{7}{2}, 3 \end{aligned}$$

となるから、以下の図が得られる。



上図の斜線部が D_1 と D_2 の共通部分である。点 $(3, 9)$, $(1, 10)$ をそれぞれ C , D とすると、求める面積は C と直線 AC で囲まれた面積と $\triangle ACD$ の面積を足し合わせたものである。直線 AC の方程式は

$$\begin{aligned} y-9 &= \frac{9-4}{3-(-2)} \cdot (x-3) \\ \therefore y &= x+6 \end{aligned}$$

である。また、 $\triangle ACD$ は $\angle ADC = 90^\circ$ の直角三角形であり、

$$\begin{aligned} CD &= \sqrt{(3-1)^2 + (9-10)^2} \\ &= \sqrt{5} \\ AD &= \sqrt{\{1-(-2)\}^2 + (10-4)^2} \\ &= 3\sqrt{5} \end{aligned}$$

となる。以上より、求める面積は、

$$\begin{aligned} &\int_{-2}^3 \{(x+6) - x^2\} dx + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \cdot 3\sqrt{5} \\ &= -\int_{-2}^3 (x-3)(x+2) dx + \frac{15}{2} \\ &= \frac{1}{6} \{3-(-2)\}^3 + \frac{15}{2} \\ &= \frac{85}{3} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{85}{3}$