

I

〔解答〕

$$n=5$$

(1)

 $n=3$ のとき、与式は

$$2|x|+|y|\leq 3 \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。

[1] $x=0$ のとき

①は

$$2\cdot 0+|y|\leq 3$$

$$\Leftrightarrow |y|\leq 3$$

となるから、これを満たす整数 y は、 $y=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$ の 7 個である。[2] $x=\pm 1$ のとき

①は

$$2\cdot 1+|y|\leq 3$$

$$\Leftrightarrow |y|\leq 1$$

となるから、これを満たす整数 y は、 $y=0, \pm 1$ の 3 個である。[3] $|x|\geq 2$ のとき

$$2|x|+|y|\geq 2\cdot 2+0=4$$

より、①を満たす整数 y はない。

以上、[1], [2], [3]より、

$$a_3=7+2\cdot 3=13$$

である。次に、 $n=4$ のとき、与式は

$$2|x|+|y|\leq 4 \quad \cdots \textcircled{2}$$

となる。

[4] $x=0$ のとき

②は

$$2\cdot 0+|y|\leq 4$$

$$\Leftrightarrow |y|\leq 4$$

となるから、これを満たす整数 y は、 $y=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4$ の 9 個である。[5] $x=\pm 1$ のとき

②は

$$2\cdot 1+|y|\leq 4$$

$$\Leftrightarrow |y|\leq 2$$

となるから、これを満たす整数 y は、 $y=0, \pm 1, \pm 2$ の 5 個である。[6] $x=\pm 2$ のとき

②は

$$2\cdot 2+|y|\leq 4$$

$$\Leftrightarrow |y|\leq 0$$

となるから、これを満たす整数 y は、 $y=0$ の 1 個である。[7] $|x|\geq 3$ のとき

$$2|x|+|y|\geq 2\cdot 3+0=6$$

より、②を満たす整数 y はない。

以上、[4], [5], [6], [7]より、

$$a_4=9+2\cdot 5+2\cdot 1=21$$

である。

(答) $a_3=13, a_4=21$

(2)

[1] n が奇数のとき[i] $x=k$ (k は $-\frac{n-1}{2}\leq k\leq \frac{n-1}{2}$ を満たす整数) のとき

$$2|k|+|y|\leq n$$

$$\Leftrightarrow |y|\leq n-2|k|$$

となるから、これを満たす整数 y は $2(n-2|k|)+1=2n+1-4|k|$ (個) がある。[ii] $|x|\geq \frac{n+1}{2}$ のとき

$$2|x|+|y|\geq 2\cdot \frac{n+1}{2}+0=n+1$$

より、 $2|x|+|y|\leq n$ を満たす整数 y はない。

以上、[i], [ii]より、

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=-\frac{n-1}{2}}^{\frac{n-1}{2}} (2n+1-4|k|) \\ &= 2n+1 + \sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} (2n+1-4k) + \sum_{k=-\frac{n-1}{2}}^{-1} (2n+1+4k) \\ &= 2n+1 + \sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} (2n+1-4k) + \sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} (2n+1-4k) \\ &= 2n+1 + 2\left\{ (2n+1)\cdot \frac{n-1}{2} - 4\cdot \frac{1}{2}\cdot \frac{n-1}{2}\left(\frac{n-1}{2}+1\right) \right\} \\ &= n^2+n+1 \end{aligned}$$

である。

[2] n が偶数のとき[i] $x=k$ (k は $-\frac{n}{2}\leq k\leq \frac{n}{2}$ を満たす整数) のとき

$$2|k|+|y|\leq n$$

$$\Leftrightarrow |y|\leq n-2|k|$$

となるから、これを満たす整数 y は $2(n-2|k|)+1=2n+1-4|k|$ (個) がある。[ii] $|x|\geq \frac{n}{2}+1$ のとき

$$2|x|+|y|\geq 2\cdot \left(\frac{n}{2}+1\right)+0=n+2$$

より、 $2|x|+|y|\leq n$ を満たす整数 y はない。

以上、[i], [ii]より、

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=-\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}} (2n+1-4|k|) \\ &= 2n+1 + \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} (2n+1-4k) + \sum_{k=-\frac{n}{2}}^{-1} (2n+1+4k) \\ &= 2n+1 + \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} (2n+1-4k) + \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} (2n+1-4k) \\ &= 2n+1 + 2\left\{ (2n+1)\cdot \frac{n}{2} - 4\cdot \frac{1}{2}\cdot \frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right) \right\} \\ &= n^2+n+1 \end{aligned}$$

となる。

以上、[1], [2]より、すべての自然数 n について $a_n=n^2+n+1$ となる。(答) $a_n=n^2+n+1$

3

〔解答〕

$$x = \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{5}{12}\pi$$

(1)

線分 OA を直径とする円の中心は $\left(\frac{t}{2}, \frac{t^2}{2}\right)$ であり、半径は $\sqrt{\left(\frac{t}{2}\right)^2 + \left(\frac{t^2}{2}\right)^2}$ であるから、方程式は

$$\left(x - \frac{t}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{t^2}{2}\right)^2 = \left(\frac{t}{2}\right)^2 + \left(\frac{t^2}{2}\right)^2$$

となる。これに $y = x^2$ を代入すると、線分 OA を直径とする円と放物線 $y = x^2$ の交点の x 座標は

$$\begin{aligned} \left(x - \frac{t}{2}\right)^2 + \left(x^2 - \frac{t^2}{2}\right)^2 &= \left(\frac{t}{2}\right)^2 + \left(\frac{t^2}{2}\right)^2 \\ \Leftrightarrow x^4 + (1 - t^2)x^2 - tx &= 0 \\ \Leftrightarrow x(x - t)(x^2 + tx + 1) &= 0 \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

の実数解となる。ここで、方程式

$$x^2 + tx + 1 = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

の判別式を D とすると、 $t > 2$ のとき、

$$\begin{aligned} D &= t^2 - 4 \\ &> 2^2 - 4 \\ &= 0 \end{aligned}$$

となるから、②は異なる 2 つの実数解を持つ。また、②は、 $x = 0$ のとき、

$$0^2 + t \cdot 0 + 1 = 1$$

となり、 $x = t$ のとき、

$$t^2 + t \cdot t + 1 = 2t^2 + 1$$

となるから、②の持つ異なる 2 つの実数解は $x \neq 0$ かつ $x \neq t$ である。よって、①は $x = 0, t$ 以外の異なる 2 つの実数解を持つから、線分 OA を直径とする円は、O, A 以外の異なる 2 点で放物線 C と交わる。

(証明終)

(2)

2 点 P, Q の x 座標をそれぞれ α, β ($\alpha \neq \beta$) とすると、これらは②の解であるから、解と係数の関係より、

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -t \\ \alpha\beta = 1 \end{cases} \quad \dots \textcircled{3}$$

が成り立つ。また、2 点 P, Q の座標はそれぞれ $P(\alpha, \alpha^2), Q(\beta, \beta^2)$ であるから、 L の方程式は

$$\begin{aligned} y &= \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\beta - \alpha}(x - \alpha) + \alpha^2 \\ \Leftrightarrow y &= \frac{(\beta + \alpha)(\beta - \alpha)}{(\beta - \alpha)}(x - \alpha) + \alpha^2 \\ \Leftrightarrow y &= (\beta + \alpha)(x - \alpha) + \alpha^2 \\ \Leftrightarrow y &= (\alpha + \beta)x - \alpha\beta \\ \therefore y &= -tx - 1 \quad (\because \textcircled{3}) \end{aligned}$$

となる。次に、 N は 2 点 P, Q の中点 $\left(\frac{\alpha + \beta}{2}, -t\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) - 1\right) = \left(-\frac{t}{2}, \frac{t^2}{2} - 1\right)$ を通り、傾きが $\frac{1}{t}$ の直線であるから、方程式は

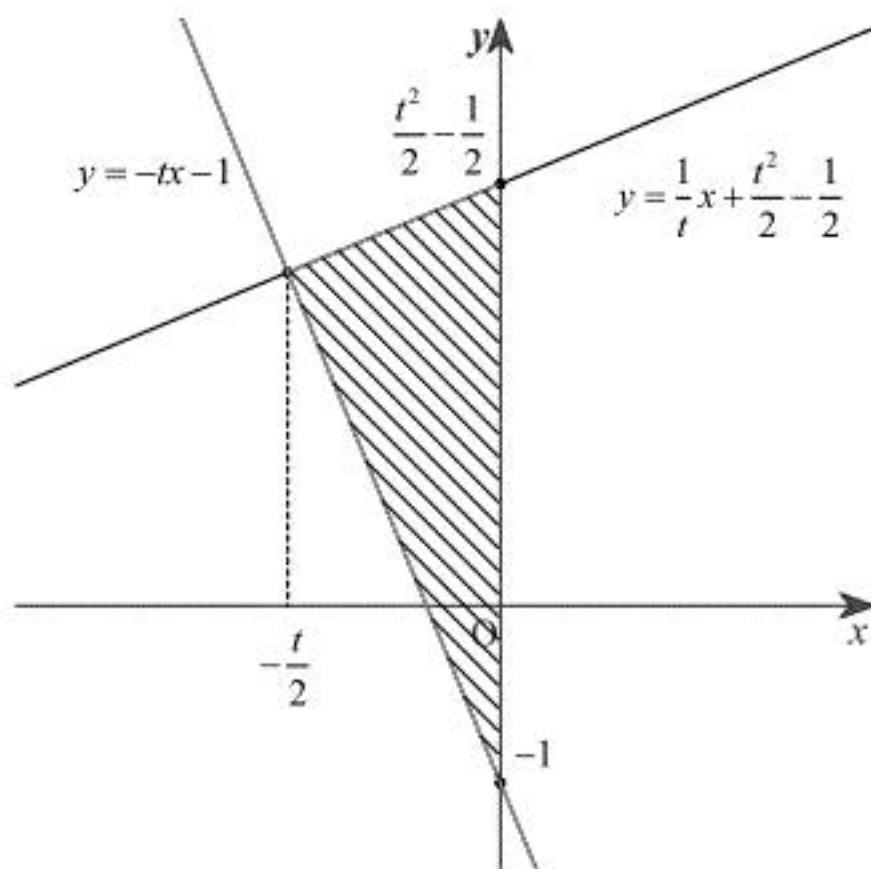
$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{t}\left\{x - \left(-\frac{t}{2}\right)\right\} + \frac{t^2}{2} - 1 \\ \Leftrightarrow y &= \frac{1}{t}x + \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad L : y = -tx - 1, \quad N : y = \frac{1}{t}x + \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}$$

(3)

L, N と y 軸とで囲まれた三角形を図示すると、下図のようになる。



よって、

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot \frac{t}{2} \cdot \left\{ \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2} - (-1) \right\} \\ &= \frac{1}{8}t(t^2 + 1) \end{aligned}$$

と表せ、 $S = \frac{15}{4}$ となるとき、

$$\begin{aligned} \frac{1}{8}t(t^2 + 1) &= \frac{15}{4} \\ \Leftrightarrow t^3 + t - 30 &= 0 \\ \Leftrightarrow (t - 3)(t^2 + 3t + 10) &= 0 \end{aligned}$$

が成り立ち、 $t > 2$ より、 $t^2 + 3t + 10 > 0$ であるから、 $t = 3$ となる。

(答) $t = 3$