

1

箱の中に 1 から 9 までの番号が付いた 9 つの玉が入っている。それらをよく混ぜて箱の中から取り出すことにする。以下の間に答えよ。(配点比率 20 %)

- (1) 箱の中から 4 つの玉を続けて取り出し、取り出した順に左から並べて 4 桁の整数を作るとき、その数が 1987 より小さくなるのは何通りあるか。ただし、一度取り出した玉は元へ戻さないものとする。
- (2) 箱の中から 1 つずつ順に全部取り出し、取り出した順に新しく 1 から 9 までの番号を付けることにする。このとき、新しく付けられる番号が最初に付けられていた番号と一致する玉の個数がちょうど 5 つになる確率を求めよ。

2

xy 平面上の動点 P がある時刻に点 $(1, 0)$ を出発し、原点 O を中心とした半径 1 の円周上を毎秒 2 度で反時計回りに回転する。また、動点 Q が同じ時刻に点 $(0, 2)$ を出発し、 O を中心とした半径 2 の円周上を毎秒 1 度で時計回りに回転する。以下の問に答えよ。(配点比率 20 %)

- (1) 出発してから t 秒後の P, Q の座標を t を用いて表せ。
- (2) 2 点 P, Q 間の距離 ℓ の最小値, およびそのときの P, Q の座標を求めよ。
- (3) $\triangle OPQ$ の面積 S の最大値, およびそのときの P, Q の座標を求めよ。

3

どのような自然数 n も、3 で割り切れない自然数 k と 0 以上の整数 a を用いて、 $n = 3^a k$ と 1 通りにかける。このとき、 $f(n) = a$ と定める。たとえば、 $f(1) = 0$ 、 $f(2) = 0$ 、 $f(3) = 1$ である。以下のことを証明せよ。(配点比率 20 %)

- (1) 自然数 m, n に対して、 $f(mn) = f(m) + f(n)$ が成り立つ。
- (2) 2 以上の自然数 n に対して、 $f(n^3 - n) \geq 1$ が成り立つ。

4

以下の問に答えよ。(配点比率 20 %)

- (1) xy 平面上の 2 つの曲線 $y = x^3 - x^2 - x + 1$ と $y = 1 - x^2$ のグラフを描き, 連立不等式

$$\begin{cases} (y - x^3 + x^2 + x - 1)(y - 1 + x^2) \leq 0 \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

の表す領域を斜線で示せ。

- (2) (1)の斜線部の領域を x 軸のまわりに 1 回転して得られる回転体の体積を求めよ。

5

(選択問題)

xyz 空間において、点 $A(1, 2, 1)$ 、点 $B(-1, 0, 3)$ を考える。以下の問に答えよ。

(配点比率 20 %)

- (1) $\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB}$ (t は実数) によって決まる直線 AB 上の点 P の座標を t を用いて表せ。
- (2) x 軸上の点 $Q(a, 0, 0)$ を固定し、点 P を直線 AB 上で動かすとき、2 点 P, Q 間の距離の最小値を a を用いて表せ。
- (3) x 軸上の点と直線 AB 上の点との距離の最小値を求めよ。

6

(選択問題)

α, β は、等式 $3\alpha^2 - 6\alpha\beta + 4\beta^2 = 0$ を満たす 0 でない複素数とする。以下の問に答えよ。

(配点比率 20 %)

- (1) 複素数 $\frac{\alpha}{\beta}$ を極形式で表せ。
- (2) 複素数平面上で複素数 $0, \alpha, \beta$ を表す点をそれぞれ O, A, B とするとき、 $\angle AOB$ および $\angle OAB$ を求めよ。