

(1)

$$\sin \theta + \cos \theta = a \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} = b \quad \cdots \textcircled{2}$$

である。②を変形して、

$$\begin{aligned} \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} &= \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} \\ &= \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} \\ &= b \end{aligned}$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{b}$$

となる。①の両辺を2乗すると、

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta &= a^2 \\ \Leftrightarrow 1 + 2 \sin \theta \cos \theta &= a^2 \\ \Leftrightarrow \sin \theta \cos \theta &= \frac{a^2 - 1}{2} \end{aligned}$$

となるから、

$$\begin{aligned} \frac{1}{b} &= \frac{a^2 - 1}{2} \\ \therefore b &= \frac{2}{a^2 - 1} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad b = \frac{2}{a^2 - 1}$$

(2)

$$\tan \theta + \sin \theta = a \quad \cdots \textcircled{3}$$

$$\tan \theta - \sin \theta = b \quad \cdots \textcircled{4}$$

である。③+④より

$$\tan \theta = \frac{a+b}{2}$$

となり、③-④より

$$\sin \theta = \frac{a-b}{2}$$

となる。 $\sin \theta \neq 0$ のとき、 $\tan \theta \neq 0$ であり、 $1 + \frac{1}{\tan^2 \theta} = \frac{1}{\sin^2 \theta}$ となることから、

$$\begin{aligned} 1 + \left(\frac{2}{a+b} \right)^2 &= \left(\frac{2}{a-b} \right)^2 \\ \Leftrightarrow (a+b)^2 (a-b)^2 + 4(a-b)^2 &= 4(a+b)^2 \\ \Leftrightarrow (a^2 - b^2)^2 &= 16ab \end{aligned}$$

である。また、 $\sin \theta = 0$ のときに関しても、 $\tan \theta = 0$ より $a = b = 0$ となるから上式を満たす。

以上より、求める関係式は、

$$(a^2 - b^2)^2 = 16ab$$

である。

$$(\text{答}) \quad (a^2 - b^2)^2 = 16ab$$

(1)

試行を4回繰り返したとき、すべてのカードの上面が黒であるのは、正四面体の

$$[1] \quad i \text{ の面が } 4 \text{ 回} \quad (i=1, 2, 3, 4)$$

$$[2] \quad i \text{ の面が } 2 \text{ 回, } j \text{ の面が } 2 \text{ 回} \quad (i, j=1, 2, 3, 4, j \neq i)$$

出る場合である。[1]の場合の確率は

$${}_4C_1 \left(\frac{1}{4} \right)^4 = \frac{1}{64}$$

である。[2]の場合の確率は、数字の組 (i, j) の選び方が ${}_4C_2$ 通り考えられ、それぞれについて並べ方が ${}_4C_2$ 通り考えられるから、

$$({}_4C_2)^2 \left(\frac{1}{4} \right)^4 = \frac{9}{64}$$

である。したがって、求める確率は

$$\frac{1}{64} + \frac{9}{64} = \frac{5}{32}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{5}{32}$$

$$\begin{aligned} E &= 0 \times \frac{5}{32} + (1+2+3+4) \times \frac{3}{32} + \{(1+2)+(1+3)+(1+4)+(2+3)+(2+4)+(3+4)\} \times \frac{1}{8} \\ &= \frac{75}{16} \end{aligned}$$

よ、

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{75}{16} \quad \text{す}$$

偶数枚であるから、試行を4回繰り返したとき、カードの上面が黒2枚と数字2枚になる確率は、

$$1 - \left(\frac{5}{32} + \frac{3}{32} \right) = \frac{3}{4}$$

である。ここで、カードの上面に書かれた数の組が (i, j) ($i, j=1, 2, 3, 4, j \neq i$) となる確率は、 (i, j) の選び方によらず等しいので、

$$\frac{3}{4} \times \frac{1}{{}_4C_2} = \frac{1}{8}$$

である。したがって、カードの上面に書かれた数の和の期待値 E は

$$\begin{aligned} E &= 0 \times \frac{5}{32} + (1+2+3+4) \times \frac{3}{32} + \{(1+2)+(1+3)+(1+4)+(2+3)+(2+4)+(3+4)\} \times \frac{1}{8} \\ &= \frac{75}{16} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{75}{16}$$

(1)

$$\begin{aligned}
 f(x) &= ax^3 - \frac{3}{2}(a^2+1)x^2 + 3ax \\
 f'(x) &= 3ax^2 - 3(a^2+1)x + 3a \\
 &= 3(ax-1)(x-a)
 \end{aligned}$$

より、与えられた条件から $a \neq 0$ であることに注意すると、

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{a}, a$$

となる。 $\frac{1}{a} \neq a$ ならば、 $x = \frac{1}{a}, a$ で $f'(x)$ の符号変化が起こるので、 $f(x)$ は極値を持つ。この命題の対偶を考えると、 $f(x)$ が極値を持たないならば、

$$\frac{1}{a} = a \Leftrightarrow a = \pm 1$$

であることがわかる。

(答) $a = \pm 1$

(2)

$f(x)$ の2つの極値は

$$\begin{aligned}
 f(a) &= -\frac{1}{2}a^2(a^2-3) \\
 f\left(\frac{1}{a}\right) &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a^2}(1-3a^2)
 \end{aligned}$$

であり、この積が負になればよい。したがって

$$\begin{aligned}
 f(a) \cdot f\left(\frac{1}{a}\right) &< 0 \\
 \Leftrightarrow (a^2-3)(1-3a^2) &< 0 \\
 \Leftrightarrow (a^2-3)\left(a^2-\frac{1}{3}\right) &> 0 \\
 \therefore 0 < a^2 < \frac{1}{3}, 3 < a^2 \\
 \Leftrightarrow a < -\sqrt{3}, -\frac{1}{\sqrt{3}} < a < 0, 0 < a < \frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3} < a
 \end{aligned}$$

である。

(答) $a < -\sqrt{3}, -\frac{1}{\sqrt{3}} < a < 0, 0 < a < \frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3} < a$

(1)

$$\begin{aligned}
 (qx+py)^2 - (pq+xy)^2 &= q^2x^2 + p^2y^2 - p^2q^2 - x^2y^2 \\
 &= -(x^2 - p^2)(y^2 - q^2) \qquad \dots \textcircled{1}
 \end{aligned}$$

となり、 $|x| < p, |y| < q$ より①は負となるので、

$$\begin{aligned}
 (qx+py)^2 &< (pq+xy)^2 \\
 |qx+py| &< |pq+xy|
 \end{aligned}$$

である。 $|x| < p, |y| < q$ より

$$pq - |xy| > 0$$

であるので、 x, y の符号に関わらず

$$pq + xy > 0$$

である。したがって

$$|qx+py| < pq+xy$$

である。

(証明終)

(2)

$$|qx+py| > pq+xy \qquad \dots \textcircled{2}$$

とおく。

[1] $|x| \leq p, |y| \leq q$ のとき

(1)と同様にして、

$$|qx+py| \leq pq+xy$$

となるから、②は成り立たない。

[2] $|x| > p, |y| < q$ または $|x| < p, |y| > q$ のとき

①は正となるので

$$|qx+py| > |pq+xy| \geq pq+xy$$

となり②は成り立つ。

[3] $|x| \geq p, |y| > q$ または $|x| > p, |y| \geq q$ のとき

① ≤ 0 となるので

$$|qx+py| \leq |pq+xy|$$

となる。 x, y が同符号のとき、 $pq+xy > 0$ より

$$|qx+py| \leq pq+xy$$

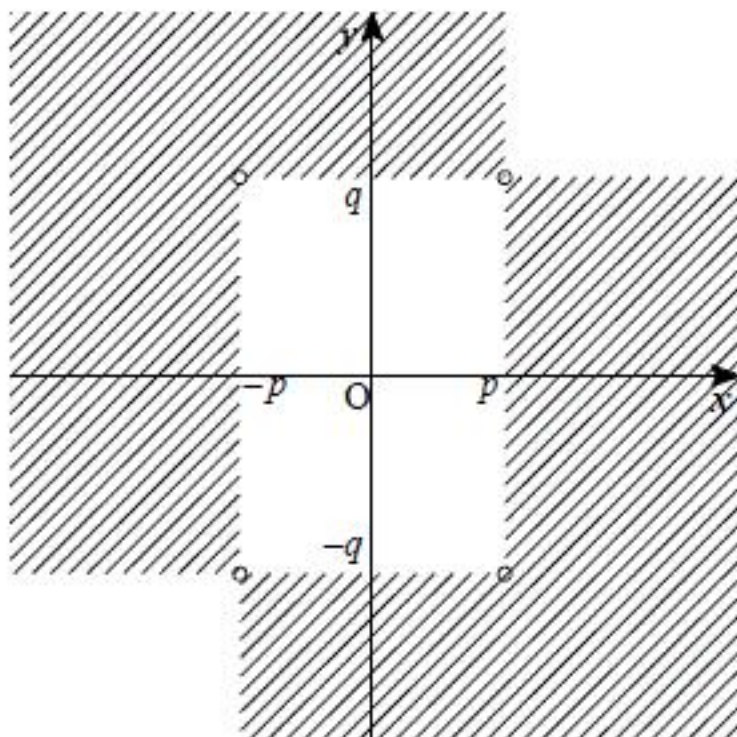
となり、②は成り立たない。 x, y が異符号のとき

$$-xy > pq$$

$$\Leftrightarrow pq+xy < 0$$

となるので、②は成り立つ。

以上[1][2][3]より、求める領域は下図の通りである。ただし、境界は含まない。



(答) 上図 (境界は含まない)

(1)

$a_2 = a_1$ ならば、帰納的に $a_n = a_1$ が成り立つ。このとき、

$$\begin{aligned}(2 - \beta - a_1)a_1 &= a_1 \\ \Leftrightarrow (1 - \beta - a_1)a_1 &= 0 \\ \therefore a_1 &= 0, 1 - \beta\end{aligned}$$

である。

(答) $a_1 = 0, 1 - \beta$

(2)

すべての自然数 n において、 $0 < a_n < 1$ が成り立つことを数学的帰納法で証明する。

[1] $n=1$ のとき

仮定より $0 < a_1 < 1$ であるから、成り立つ。

[2] $n=k$ で $0 < a_k < 1$ が成り立つとき

$$\begin{aligned}0 < a_k < 1, 0 < \beta < 1 \text{ より,} \\ 2 - \beta - a_k &> 0\end{aligned}$$

であるから、

$$a_{k+1} = (2 - \beta - a_k)a_k > 0$$

となる。また、

$$\begin{aligned}1 - a_{k+1} &= 1 - (2 - \beta - a_k)a_k \\ &= (1 - a_k)^2 + \beta a_k \\ &> 0\end{aligned}$$

であるので、

$$0 < a_{k+1} < 1$$

となる。したがって、 $n=k+1$ のときも、題意の条件は成り立つ。

以上[1][2]より、すべての自然数 n において $0 < a_n < 1$ が成り立つことが示された。

(証明終)

(3)

$0 < a_1 < 1 - \beta$ ならば、すべての自然数 n に対して $0 < a_n < 1 - \beta$ かつ $a_n < a_{n+1}$ が成り立つことを、数学的帰納法を用いて証明する。

[1] $n=1$ のとき

仮定より $0 < a_1 < 1 - \beta$ なので、

$$\begin{aligned}a_2 - a_1 &= (1 - \beta - a_1)a_1 > 0 \\ \therefore a_1 &< a_2\end{aligned}$$

となり成り立つ。

[2] $n=k$ で成り立つと仮定するとき

$0 < a_k < 1 - \beta$ かつ $a_k < a_{k+1}$ である。(2)の結果から $a_{k+1} > 0$ であり、

$$\begin{aligned}1 - \beta - a_{k+1} &= 1 - \beta - (2 - \beta - a_k)a_k \\ &= (1 - a_k)^2 - \beta(1 - a_k) \\ &= (1 - a_k)(1 - \beta - a_k) \\ &> 0\end{aligned}$$

であるので、 $0 < a_{k+1} < 1 - \beta$ が成り立つ。また、

$$\begin{aligned}a_{k+2} - a_{k+1} &= (1 - \beta - a_{k+1})a_{k+1} > 0 \\ \therefore a_{k+1} &< a_{k+2}\end{aligned}$$

も成り立つ。したがって、 $n=k+1$ のときも、題意の条件は成り立つ。

以上[1][2]より、 $0 < a_1 < 1 - \beta$ ならば、すべての自然数 n に対して、 $0 < a_n < 1 - \beta$ かつ $a_n < a_{n+1}$ が成り立つことが示された。

(証明終)