

(1)

$$\sin \theta + \cos \theta = a \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} = b \quad \cdots \textcircled{2}$$

である。②を変形して、

$$\begin{aligned} \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} &= \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} \\ &= \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} \\ &= b \end{aligned}$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{b}$$

となる。①の両辺を2乗すると、

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta &= a^2 \\ \Leftrightarrow 1 + 2 \sin \theta \cos \theta &= a^2 \\ \Leftrightarrow \sin \theta \cos \theta &= \frac{a^2 - 1}{2} \end{aligned}$$

となるから、

$$\begin{aligned} \frac{1}{b} &= \frac{a^2 - 1}{2} \\ \therefore b &= \frac{2}{a^2 - 1} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad b = \frac{2}{a^2 - 1}$$

(2)

$$\tan \theta + \sin \theta = a \quad \cdots \textcircled{3}$$

$$\tan \theta - \sin \theta = b \quad \cdots \textcircled{4}$$

である。③+④より

$$\tan \theta = \frac{a+b}{2}$$

となり、③-④より

$$\sin \theta = \frac{a-b}{2}$$

となる。 $\sin \theta \neq 0$ のとき、 $\tan \theta \neq 0$ であり、 $1 + \frac{1}{\tan^2 \theta} = \frac{1}{\sin^2 \theta}$ となることから、

$$\begin{aligned} 1 + \left(\frac{2}{a+b} \right)^2 &= \left(\frac{2}{a-b} \right)^2 \\ \Leftrightarrow (a+b)^2 (a-b)^2 + 4(a-b)^2 &= 4(a+b)^2 \\ \Leftrightarrow (a^2 - b^2)^2 &= 16ab \end{aligned}$$

である。また、 $\sin \theta = 0$ のときに関しても、 $\tan \theta = 0$ より $a = b = 0$ となるから上式を満たす。
以上より、求める関係式は、

$$(a^2 - b^2)^2 = 16ab$$

である。

$$(\text{答}) \quad (a^2 - b^2)^2 = 16ab$$

(1)

試行を4回繰り返したとき、すべてのカードの上面が黒であるのは、正四面体の

$$[1] \quad i \text{ の面が4回} \quad (i=1, 2, 3, 4)$$

$$[2] \quad i \text{ の面が2回, } j \text{ の面が2回} \quad (i, j=1, 2, 3, 4, j \neq i)$$

出る場合である。[1]の場合の確率は

$${}_4C_1 \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{1}{64}$$

である。[2]の場合の確率は、数字の組 (i, j) の選び方が ${}_4C_2$ 通り考えられ、それぞれについて並べ方が ${}_4C_2$ 通り考えられるから、

$$({}_4C_2)^2 \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{9}{64}$$

である。したがって、求める確率は

$$\frac{1}{64} + \frac{9}{64} = \frac{5}{32}$$

である。

(答) $\frac{5}{32}$

(2)

試行を4回繰り返したとき、すべてのカードの上面が数字となるためには、1, 2, 3, 4がすべて1回ずつ出ればよい。このような数字の出方は4!通り考えられるから、この場合の確率は、

$$4! \times \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{3}{32}$$

である。また、試行を4回繰り返した後、上面が黒（数字）となっているカードの枚数は必ず偶数枚であるから、試行を4回繰り返したとき、カードの上面が黒2枚と数字2枚になる確率は、

$$1 - \left(\frac{5}{32} + \frac{3}{32}\right) = \frac{3}{4}$$

である。ここで、カードの上面に書かれた数の組が (i, j) ($i, j=1, 2, 3, 4, j \neq i$) となる確率は、 (i, j) の選び方によらず等しいので、

$$\frac{3}{4} \times \frac{1}{{}_4C_2} = \frac{1}{8}$$

である。したがって、カードの上面に書かれた数の和の期待値 E は

$$\begin{aligned} E &= 0 \times \frac{5}{32} + (1+2+3+4) \times \frac{3}{32} + \{(1+2)+(1+3)+(1+4)+(2+3)+(2+4)+(3+4)\} \times \frac{1}{8} \\ &= \frac{75}{16} \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{75}{16}$

(1)

$$\begin{aligned}
 f(x) &= ax^3 - \frac{3}{2}(a^2+1)x^2 + 3ax \\
 f'(x) &= 3ax^2 - 3(a^2+1)x + 3a \\
 &= 3(ax-1)(x-a)
 \end{aligned}$$

より、与えられた条件から $a \neq 0$ であることに注意すると、

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{a}, a$$

となる。 $\frac{1}{a} \neq a$ ならば、 $x = \frac{1}{a}, a$ で $f'(x)$ の符号変化が起こるので、 $f(x)$ は極値を持つ。この命題の対偶を考えると、 $f(x)$ が極値を持たないならば、

$$\frac{1}{a} = a \Leftrightarrow a = \pm 1$$

であることがわかる。

(答) $a = \pm 1$

(2)

$f(x)$ の2つの極値は

$$\begin{aligned}
 f(a) &= -\frac{1}{2}a^2(a^2-3) \\
 f\left(\frac{1}{a}\right) &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a^2}(1-3a^2)
 \end{aligned}$$

であり、この積が負になればよい。したがって

$$\begin{aligned}
 f(a) \cdot f\left(\frac{1}{a}\right) &< 0 \\
 \Leftrightarrow (a^2-3)(1-3a^2) &< 0 \\
 \Leftrightarrow (a^2-3)\left(a^2-\frac{1}{3}\right) &> 0 \\
 \therefore 0 < a^2 < \frac{1}{3}, 3 < a^2 \\
 \Leftrightarrow a < -\sqrt{3}, -\frac{1}{\sqrt{3}} < a < 0, 0 < a < \frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3} < a
 \end{aligned}$$

である。

(答) $a < -\sqrt{3}, -\frac{1}{\sqrt{3}} < a < 0, 0 < a < \frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3} < a$

(1)

$$f'(x) = \frac{x}{1-x} = -1 - \frac{1}{x-1}$$

$$f(x) = -x - \log|x-1| + C$$

である。(Cは積分定数) ここで, $x=0$ を代入すると,

$$f(0) = 0$$

$$\Leftrightarrow C = 0$$

であるので,

$$f(x) = -x - \log|x-1|$$

となる。

$$(\text{答}) \quad f(x) = -x - \log|x-1|$$

(2)

$$x < 1 \Leftrightarrow 1-x > 0$$

より, $f'(x) = \frac{x}{1-x}$ の増減は以下の通りである。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$\diagup$
$f(x)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$	$\diagup$

よって, $f(x)$ は $x=0$ のときに最小値0をとる。

$$(\text{答}) \quad x=0 \text{ のとき, 最小値: } 0$$

(3)

$f(x)$ は $x < 1$ において微分可能であるから, $p < 1, q < 1, p \neq q$ のとき, 平均値の定理より,

$$\frac{f(q) - f(p)}{q - p} = f'(c)$$

をみたす実数 c が p と q の間に存在するので

$$\frac{\{-q - \log(1-q)\} - \{-p - \log(1-p)\}}{q - p} = \frac{c}{1-c}$$

$$\therefore \frac{\log(1-p) - \log(1-q)}{p - q} = -\frac{c}{1-c} - 1 = -\frac{1}{1-c}$$

となる。ここで, p と q の大小による場合分けを考える。

[1] $p < q$ のとき

$p < c < q$ より

$$-\frac{1}{1-p} > -\frac{1}{1-c} > -\frac{1}{1-q}$$

なので,

$$\frac{\log(1-p) - \log(1-q)}{p - q} = -\frac{1}{1-c} < -\frac{1}{1-p}$$

である。

[2] $p > q$ のとき

$q < c < p$ より

$$-\frac{1}{1-p} < -\frac{1}{1-c} < -\frac{1}{1-q}$$

なので,

$$\frac{\log(1-p) - \log(1-q)}{p - q} = -\frac{1}{1-c} > -\frac{1}{1-p}$$

である。

$$(\text{答}) \quad p < q \text{ のとき } \frac{\log(1-p) - \log(1-q)}{p - q} < -\frac{1}{1-p}$$

$$p > q \text{ のとき } \frac{\log(1-p) - \log(1-q)}{p - q} > -\frac{1}{1-p}$$

(4)

$$f''(x) = \frac{1}{(x-1)^2} > 0$$

である。ここで,

$$h(x) = f(x) - g(x)$$

とおくと,

$$h'(x) = f'(x) - f'(a)$$

$$h''(x) = f''(x) > 0$$

より, $h'(x)$ は単調増加する。したがって, $h(x)$ の増減は以下の通りになる。

x	$\cdots$	a	$\cdots$	1
$h'(x)$	$-$	0	$+$	$\diagup$
$h(x)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$	$\diagup$

よって, $x < 1$ において

$$h(x) \geq h(a) = 0$$

$$\Leftrightarrow g(x) \leq f(x)$$

となる。

(証明終)

(1)

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow A \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

である。

$$(\text{答}) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(2)

$$B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

であるから,

$$AB = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= H^2$$

となる。 $H = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ とおくと

$$H^2 = \begin{pmatrix} e^2 + fg & f(e+h) \\ g(e+h) & h^2 + fg \end{pmatrix}$$

より,

$$f(e+h) = g(e+h) = 0$$

とならなければならない。

[1] $e+h=0$ のとき

AB の $(1, 1)$ 成分と $(2, 2)$ 成分が異なることから,

$$e^2 + fg \neq h^2 + fg$$

とならなければならない。しかし,

$$e = -h$$

$$\therefore e^2 + fg = h^2 + fg$$

となるため, 不適である。

[2] $f = g = 0$ のとき

$$H^2 = \begin{pmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & h^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

であるので,

$$e = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, h = \pm \sqrt{2} \quad (\text{複号任意})$$

$$\therefore H = \begin{pmatrix} \pm \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \pm \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

である。

$$(\text{答}) \begin{pmatrix} \pm \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \pm \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad (\text{複号任意})$$

(3)

$$[1] \quad H = \begin{pmatrix} \pm \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \pm \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad (\text{複号同順}) \quad \text{の場合}$$

$$A = HU$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \pm \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \theta & \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta \\ \pm \sqrt{2} \sin \theta & \pm \sqrt{2} \cos \theta \end{pmatrix} \quad (\text{複号同順}) \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。 $0 \leq \theta \leq \pi$ より $\sin \theta \geq 0$ であるから, これを満たす U が存在するのは,

$$H = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

となる場合のみである。

$$[2] \quad H = \begin{pmatrix} \pm \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \mp \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad (\text{複号同順}) \quad \text{の場合}$$

$$A = HU$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \mp \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \theta & \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta \\ \mp \sqrt{2} \sin \theta & \mp \sqrt{2} \cos \theta \end{pmatrix} \quad (\text{複号同順}) \quad \dots \textcircled{2}$$

となるが, ②式の両辺の符号が一致しないため不適である。

以上[1][2]より, $A = HU$ を満たす U が存在するのは $H = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ となる場合のみである。

ここで, ①式の $(1, 1)$ 成分および $(2, 1)$ 成分を比較すると,

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

となるから, $\theta = \frac{\pi}{4}$ である。

$$(\text{答}) \quad H = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}, \theta = \frac{\pi}{4}$$