

1

(1)

$$a_1 = S_1 = 1 + \alpha$$

$n \geq 2$ のとき,

$$\begin{aligned} S_n - S_{n-1} = a_n &= n^2 + n\alpha - (n-1)^2 - (n-1)\alpha \\ &= 2n - 1 + \alpha \end{aligned}$$

これは $n = 1$ のときも成立する.

よって (答) $a_n = 2n - 1 + \alpha$

(2)

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=1}^n k a_k \\ &= \sum_{k=1}^n (2k^2 - k + k\alpha) \\ &= 2 \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + (\alpha - 1) \cdot \frac{1}{2} n(n+1) \\ &= \frac{n(n+1)(4n+3\alpha-1)}{6} \dots (\text{答}) \end{aligned}$$

(3)

$$T_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)(4n+3\alpha+3)}{6}$$

より, 条件は,

$$\frac{(n+1)(n+2)(4n+3\alpha+3)}{6} > \frac{n(n+1)(4n+3\alpha-1)}{6}$$

これを整理すると,

$$n > -\frac{\alpha+1}{2}$$

これがすべての自然数 n に対して成立するためには,

$$-\frac{\alpha+1}{2} < 1$$

すなわち (答) $\alpha > -3$

(1)

$$\begin{aligned}
 f(2) &= \int_0^3 |t-2| dt \\
 &= \int_0^2 (-t+2) dt + \int_2^3 (t-2) dt \\
 &= \left[-\frac{1}{2}t^2 + 2t \right]_0^2 + \left[\frac{1}{2}t^2 - 2t \right]_2^3 \\
 &= \frac{5}{2} \cdots (\text{答})
 \end{aligned}$$

(2)

(i) $x \leq 0$ のとき,

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \int_0^3 (t-x) dt \\
 &= \left[\frac{1}{2}t^2 - tx \right]_0^3 \\
 &= -3x + \frac{9}{2}
 \end{aligned}$$

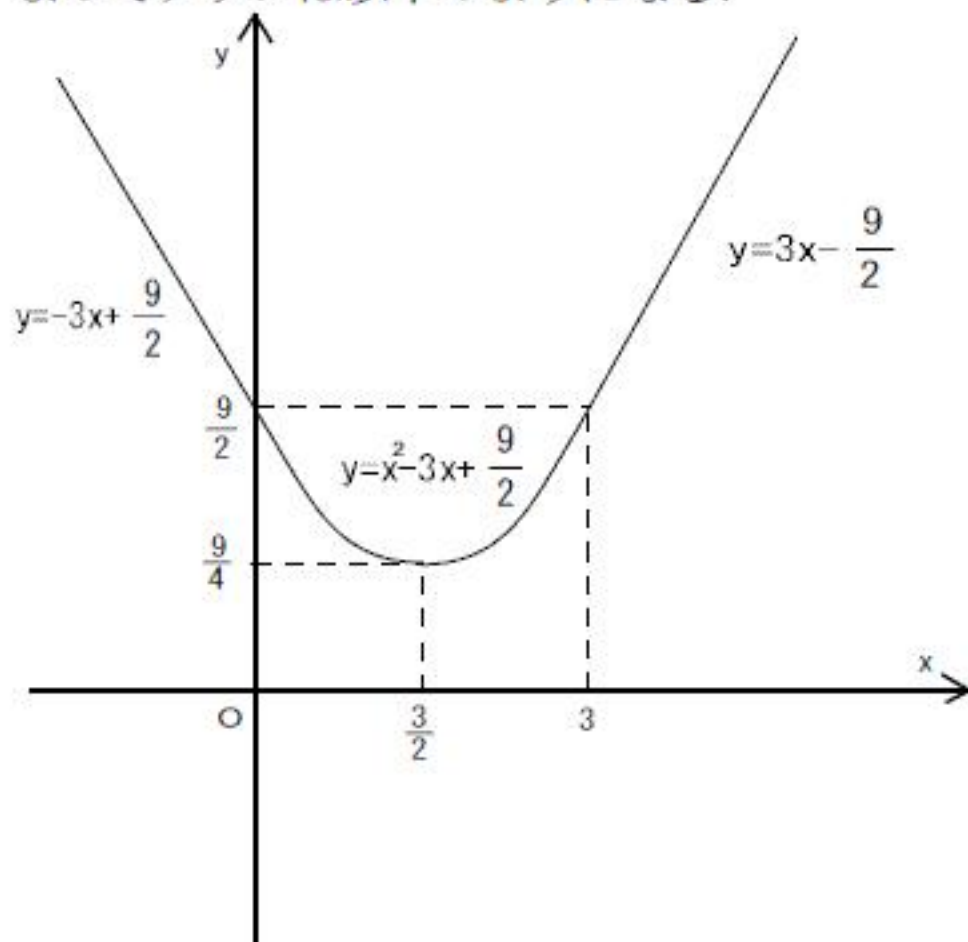
(ii) $0 \leq x \leq 3$ のとき,

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \int_0^x (-t+x) dt + \int_x^3 (t-x) dt \\
 &= \left[-\frac{1}{2}t^2 + tx \right]_0^x + \left[\frac{1}{2}t^2 - tx \right]_x^3 \\
 &= x^2 - 3x + \frac{9}{2}
 \end{aligned}$$

(iii) $x \geq 3$ のとき,

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \int_0^3 (-t+x) dt \\
 &= \left[-\frac{1}{2}t^2 + tx \right]_0^3 \\
 &= 3x - \frac{9}{2}
 \end{aligned}$$

よってグラフは以下のようになる.



(3)

$y = m(x-2)$ は, 点 $(2, 0)$ を通り, 傾き m の直線を表す.
 これと $y = x^2 - 3x + \frac{9}{2}$ のグラフが $0 \leq x \leq 3$ で接する
 ような m を考えると,

$$x^2 - 3x + \frac{9}{2} = mx - 2m$$

すなわち

$$x^2 - (3+m)x + \frac{9}{2} + 2m = 0$$

の判別式を D とすれば,

$$D = (3+m)^2 - 18 - 8m = 0$$

$$m^2 - 2m - 9 = 0$$

$$m = 1 \pm \sqrt{10}$$

ここで, $m = 1 + \sqrt{10}$ のときは接点が $0 \leq x \leq 3$ の範囲に
 無いので不適.

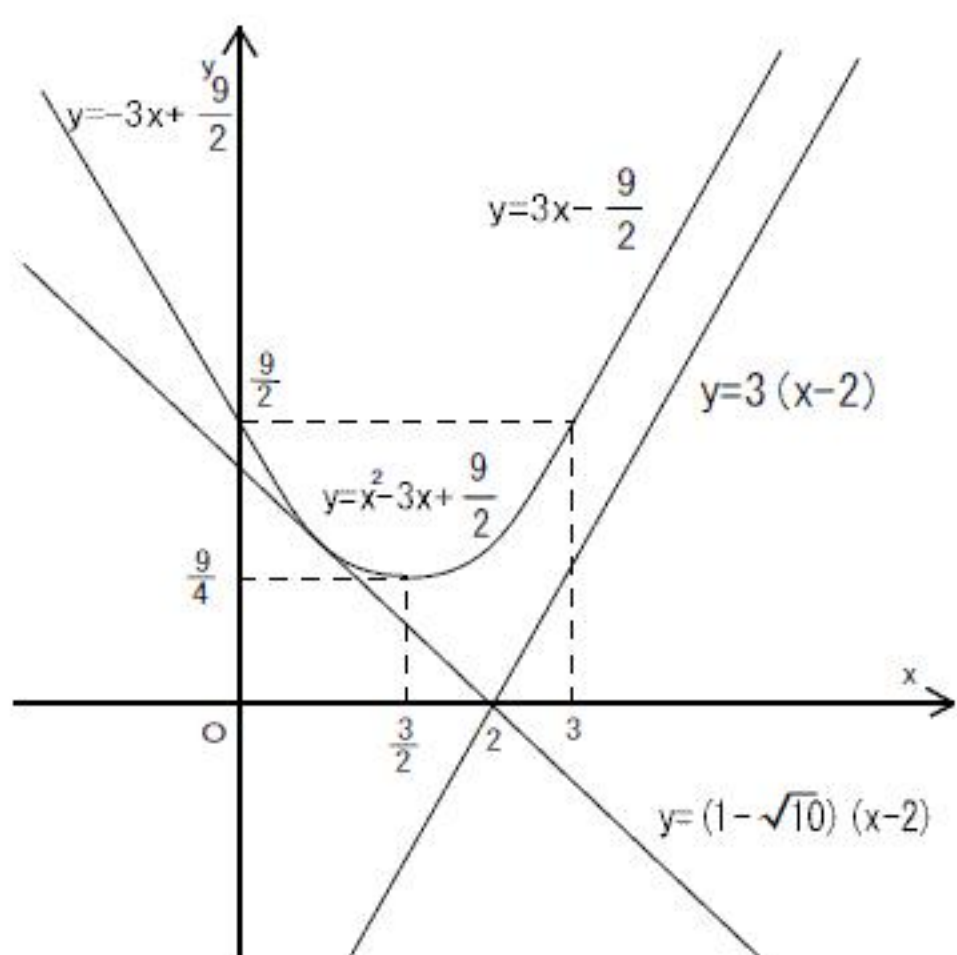
よって以下のグラフより

 $x \leq 2$ で $f(x) > m(x-2)$ であるための条件は,

$$m > 1 - \sqrt{10}$$

 $x \geq 2$ で $f(x) > m(x-2)$ であるための条件は

$$m \leq 3$$

したがって求める m の値の範囲は(答) $1 - \sqrt{10} < m \leq 3$

3

(1)

GIFUを一まとまりと考え、それ以外を○で表すと、
○3つ,"GIFU"1つの4文字を並べた上で○に残りを入れればよいので、

$$\frac{4!}{3! \cdot 1!} \times 3! = 24$$

よって (答) 24 通り

(2)

条件より,FUが入る位置は、

○○FU○○○ … (i)

○○○FU○○ … (ii)

○○○○FU○ … (iii)

○○○○○FU … (iv)

の4通りが考えられる。

(i) のとき,FUの左にはGIが入るので、右側3箇所に残り3文字を入れればよいので、

$$3! = 6 \text{ 通り}$$

(ii) のとき,FUの左にはGIの入りが2通り、残りの3箇所に3文字を入れるので、

$$2 \times 3! = 12 \text{ 通り}$$

(iii) のとき,FUの左にはGIの入りが3通り、
残りの箇所に(ii)同様に入れて、 $3 \times 3! = 18$ となるが、
GIGIの並び順のものを2度数えているので、

$$3 \times 3! - 1 = 17 \text{ 通り}$$

(iv) のとき,FUの左にはGIの入りが4通り、
残りが3!だが、(iii)同様に重複が3つあるので、

$$4 \times 3! - 3 = 21$$

(i) から (iv) より $6 + 12 + 17 + 21 = 56$, よって

(答) 56 通り

4

(1)

$$f(x) = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + m - \frac{9}{4}$$

であるので,

$$g = f(m) = m^2 + 4m \cdots (\text{答})$$

(2)

$m + 2 = -\frac{3}{2}$ となるのは, $m = -\frac{7}{2}$ のとき,
よって

(i) $-\frac{7}{2} \leq m \leq -\frac{3}{2}$ のとき,

$$g = f\left(-\frac{3}{2}\right) = m - \frac{9}{4}$$

(ii) $m \leq -\frac{7}{2}$ のとき,

$$g = f(m + 2) = m^2 + 8m + 10$$

(i),(ii) より,

$$(\text{答}) \ g = \begin{cases} m - \frac{9}{4} & \left(-\frac{7}{2} \leq m \leq -\frac{3}{2}\right) \\ m^2 + 8m + 10 & \left(m \leq -\frac{7}{2}\right) \end{cases}$$

(3)

(1),(2) よりそれぞれの領域の最小値を求めて考えると,
全体としては (答) $m = -4$ のとき最小値 -6

5

(1)

判別式を D とすると,

$$\begin{aligned}
 D &= 4(\cos \theta + \sin \theta)^2 - 4(1 + 2\cos^2 \theta) \\
 &= 8\cos \theta (\sin \theta - \cos \theta) \geq 0 \\
 &\Leftrightarrow \cos \theta \cdot \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) \geq 0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \frac{5}{4}\pi \leq \theta \leq \frac{3}{2}\pi \cdots (\text{答})
 \end{aligned}$$

(2)

解と係数の関係から,

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 2(\cos \theta + \sin \theta) \\ \alpha\beta = 1 + 2\cos^2 \theta \end{cases}$$

これらから,

$$\begin{aligned}
 \alpha^2 + \beta^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \\
 &= 4(\cos \theta + \sin \theta)^2 - 2(1 + 2\cos^2 \theta) \\
 &= 4\sin 2\theta - 2\cos 2\theta \\
 &= 2\sqrt{5}\sin(2\theta - \gamma)
 \end{aligned}$$

ただし γ は $\tan \gamma = \frac{1}{2}$, $0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$ を満たす角.

(1) から

$$\frac{\pi}{2} - \gamma \leq 2\theta - \gamma \leq \pi - \gamma$$

$$\frac{5}{2}\pi - \gamma \leq 2\theta - \gamma \leq 3\pi - \gamma$$

であるので, 最大値は (答) $2\sqrt{5}$

(3)

$\tan \gamma = \frac{1}{2} < \tan \frac{\pi}{4}$ より $0 < \gamma < \frac{\pi}{4}$.
 よって $\sin(2\theta - \gamma)$ は,

$$2\theta - \gamma = \pi - \gamma, 3\pi - \gamma$$

のとき最小となり,

$$\sin(2\theta - \gamma) = \sin(\pi - \gamma) = \sin \gamma = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

したがって, $\alpha^2 + \beta^2$ の最小値は $2\sqrt{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = 2$.このとき, $2\theta - \gamma = \pi - \gamma, 3\pi - \gamma$ より,

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$$

(答) $\alpha^2 + \beta^2$ は $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$ のときに最小値 2 をとる.