

1

(1)

$$a_1 = S_1 = 1 + \alpha$$

$n \geq 2$ のとき,

$$\begin{aligned} S_n - S_{n-1} = a_n &= n^2 + n\alpha - (n-1)^2 - (n-1)\alpha \\ &= 2n - 1 + \alpha \end{aligned}$$

これは $n = 1$ のときも成立する.

よって (答) $a_n = 2n - 1 + \alpha$

(2)

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=1}^n k a_k \\ &= \sum_{k=1}^n (2k^2 - k + k\alpha) \\ &= 2 \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + (\alpha - 1) \cdot \frac{1}{2} n(n+1) \\ &= \frac{n(n+1)(4n+3\alpha-1)}{6} \quad \dots (\text{答}) \end{aligned}$$

(3)

$$T_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)(4n+3\alpha+3)}{6}$$

より, 条件は,

$$\frac{(n+1)(n+2)(4n+3\alpha+3)}{6} > \frac{n(n+1)(4n+3\alpha-1)}{6}$$

これを整理すると,

$$n > -\frac{\alpha+1}{2}$$

これがすべての自然数 n に対して成立するためには,

$$-\frac{\alpha+1}{2} < 1$$

すなわち (答) $\alpha > -3$

2

(1)

$$\begin{aligned}
 f(2) &= \int_0^3 |t-2| dt \\
 &= \int_0^2 (-t+2) dt + \int_2^3 (t-2) dt \\
 &= \left[-\frac{1}{2}t^2 + 2t \right]_0^2 + \left[\frac{1}{2}t^2 - 2t \right]_2^3 \\
 &= \frac{5}{2} \cdots (\text{答})
 \end{aligned}$$

(2)

(i) $x \leq 0$ のとき,

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \int_0^3 (t-x) dt \\
 &= \left[\frac{1}{2}t^2 - tx \right]_0^3 \\
 &= -3x + \frac{9}{2}
 \end{aligned}$$

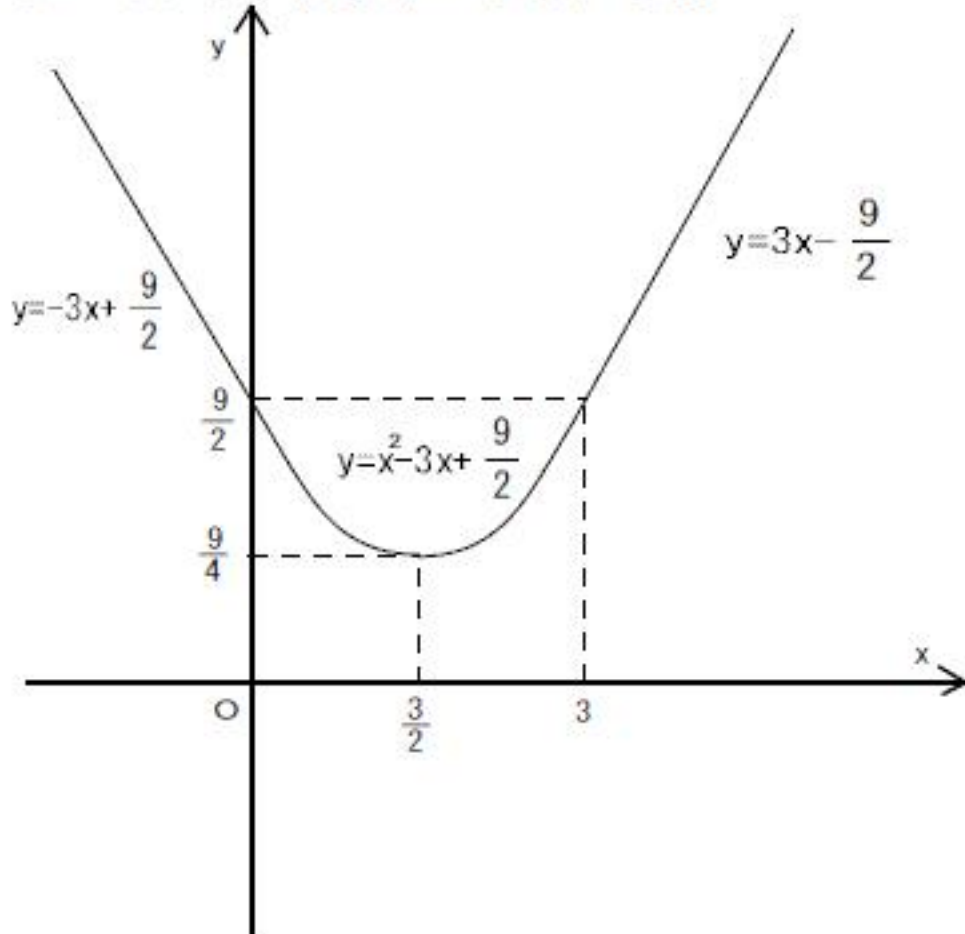
(ii) $0 \leq x \leq 3$ のとき,

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \int_0^x (-t+x) dt + \int_x^3 (t-x) dt \\
 &= \left[-\frac{1}{2}t^2 + tx \right]_0^x + \left[\frac{1}{2}t^2 - tx \right]_x^3 \\
 &= x^2 - 3x + \frac{9}{2}
 \end{aligned}$$

(iii) $x \geq 3$ のとき,

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \int_0^3 (-t+x) dt \\
 &= \left[-\frac{1}{2}t^2 + tx \right]_0^3 \\
 &= 3x - \frac{9}{2}
 \end{aligned}$$

よってグラフは以下のようなになる.



(3)

$y = m(x-2)$ は、点 $(2, 0)$ を通り、傾き m の直線を表す。
 これと $y = x^2 - 3x + \frac{9}{2}$ のグラフが $0 \leq x \leq 3$ で接する
 ような m を考えると、

$$x^2 - 3x + \frac{9}{2} = mx - 2m$$

すなわち

$$x^2 - (3+m)x + \frac{9}{2} + 2m = 0$$

の判別式を D とすれば、

$$D = (3+m)^2 - 18 - 8m = 0$$

$$m^2 - 2m - 9 = 0$$

$$m = 1 \pm \sqrt{10}$$

ここで、 $m = 1 + \sqrt{10}$ のときは接点が $0 \leq x \leq 3$ の範囲
 に無いので不適.

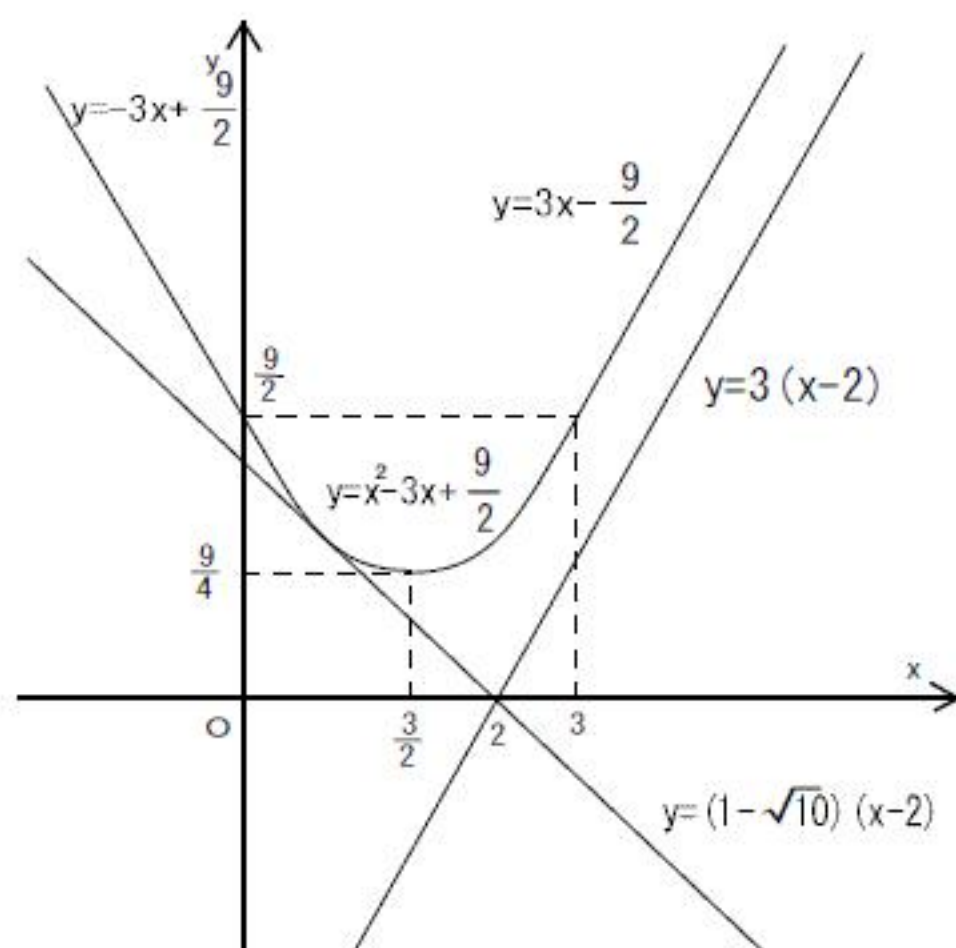
よって以下のグラフより

 $x \leq 2$ で $f(x) > m(x-2)$ であるための条件は、

$$m > 1 - \sqrt{10}$$

 $x \geq 2$ で $f(x) > m(x-2)$ であるための条件は

$$m \leq 3$$

したがって求める m の値の範囲は(答) $1 - \sqrt{10} < m \leq 3$

(1)

GIFUを一まとまりと考え、それ以外を○で表すと、
 ○3つ,"GIFU"1つの4文字を並べた上で○に残りを入れればよいので、

$$\frac{4!}{3! \cdot 1!} \times 3! = 24$$

よって (答) 24通り

(2)

条件より,FUが入る位置は、

○○FU○○…(i)

○○○FU○○…(ii)

○○○○FU○…(iii)

○○○○○FU…(iv)

の4通りが考えられる。

(i) のとき,FUの左にはGIが入るので、右側3箇所に残り3文字を入れればよいので、

$$3! = 6 \text{ 通り}$$

(ii) のとき,FUの左にはGIの入りが2通り、残りの3箇所に3文字を入れるので、

$$2 \times 3! = 12 \text{ 通り}$$

(iii) のとき,FUの左にはGIの入りが3通り、
 残りの箇所に(ii)同様に入れて、 $3 \times 3! = 18$ となるが、
 GIGIの並び順のものを2度数えているので、

$$3 \times 3! - 1 = 17 \text{ 通り}$$

(iv) のとき,FUの左にはGIの入りが4通り、
 残りが3!だが、(iii)同様に重複が3つあるので、

$$4 \times 3! - 3 = 21$$

(i) から (iv) より $6 + 12 + 17 + 21 = 56$, よって

(答) 56通り

4

(1)

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} g_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{2 \cdot 2^k}{5^k} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{4}{5} \left(\frac{2}{5} \right)^{k-1} \\
 &= \frac{\frac{4}{5}}{1 - \frac{2}{5}} \\
 &= \frac{4}{3} \cdots (\text{答})
 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
 g_n &= \sum_{k=1}^n \frac{x^{k+1}}{(x^2+1)^k} \\
 &= \sum_{k=1}^n \frac{x^2}{x^2+1} \left(\frac{x}{x^2+1} \right)^{k-1}
 \end{aligned}$$

より, 初項 $\frac{x^2}{x^2+1}$, 公比 $\frac{x}{x^2+1}$ の無限等比級数である.

ここで $x^2 < x^4 + 2x^2 + 1 = (x^2+1)^2$ より,

$|x| < |x^2+1|$ すなわち $\left| \frac{x}{x^2+1} \right| < 1$ であり,

この無限級数は収束する.

よって, すべての実数 x に対して $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x)$ は存在し,

$$g = \frac{x^2}{x^2+1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{x^2+1}} = \frac{x^2}{x^2 - x + 1} \cdots (\text{答})$$

となる.

(3)

$$\begin{aligned}
 g' &= \frac{2x(x^2 - x + 1) - (2x - 1) \cdot x^2}{(x^2 - x + 1)^2} \\
 &= \frac{-x^2 + 2x}{(x^2 - x + 1)^2}
 \end{aligned}$$

よって $g' = 0 \Leftrightarrow x = 0, 2$ より増減表をかくと以下の通り.

x		0		2	
g'	$-$	0	$+$	0	$-$
g	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{3}$	$\searrow$

また,

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} g = 1$$

であるので,

$$(\text{答}) \begin{cases} \text{最大値: } \frac{4}{3} \\ \text{最小値: } 0 \end{cases}$$

(1)

 $y^2 = 4 \cdot \frac{1}{2}x$ より,

 焦点 $F\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, l は $x = -\frac{1}{2}$ である.

 $P\left(\frac{1}{2}u^2, u\right)$ と置く.

 このとき $H\left(-\frac{1}{2}, u\right)$ である.

よって,

$$t = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}u^2}{3} = \frac{1}{6}u^2$$

$$s = \frac{u + 0 + u}{3} = \frac{2}{3}u$$

 これらから u を消去して, (答) $t = \frac{3}{8}s^2$

(2)

 回転操作後の点を (t', s') とすると,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} t' \\ s' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} t - s \\ t + s \end{pmatrix} \end{aligned}$$

 よって $s' = \frac{\sqrt{2}}{2}t + \frac{\sqrt{2}}{2}s = 0$ より $t = -s$ となる.

 (1) の結果とあわせて, $t = 0, \frac{8}{3}$. このうち $t = 0$ のときは $s = 0$ となるので,

 P は原点と異なるという条件とあわせると $t = 0$ は不適. よって,

(答) $\left(\frac{8}{3}, -\frac{8}{3}\right)$