

(1)

 $5^x = 81$ より両辺対数をとって、

$$x \log_3 5 = \log_3 81 = 4$$

よって $ax = 4$ となり、 $x = \frac{4}{a}$ となる。同様にして、 $135^y = 243$ から

$$y \log_3 135 = \log_3 243$$

であり、

$$135 = 3^3 \times 5, \quad 243 = 3^5$$

であるから、

$$y(3+a) = 5$$

よって $y = \frac{5}{a+3}$ となる。

$$(\text{答}) \quad x = \frac{4}{a}, \quad y = \frac{5}{a+3}$$

(2)

$$\frac{m}{y} - \frac{n}{x} = \frac{xm - ny}{xy} = \frac{a(a+3)}{20} \left(\frac{4m}{a} - \frac{5n}{a+3} \right) = \frac{3}{5}m + \frac{4m-5n}{20}a$$

である。このことと条件から、

$$k = \frac{m}{y} - \frac{n}{x} = \frac{3}{5}m + \frac{4m-5n}{20}a \Leftrightarrow k - \frac{3}{5}m = \frac{4m-5n}{20}a \quad \dots \textcircled{1}$$

ここで、 m, n, k が自然数であり a が無理数であることから①とあわせて、

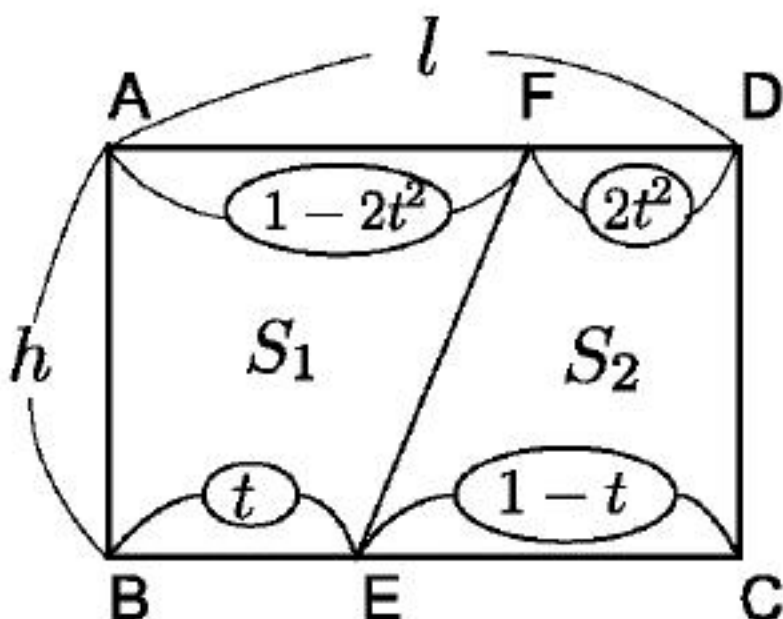
$$k - \frac{3}{5}m = 0$$

$$4m - 5n = 0$$

であることがわかる。

よって $4m = 5n$ であるので $m = 5l$, $n = 4l$ (l は自然数) とおくことができる。このとき、 $k = \frac{3}{5}m = 3l$ であるので、 k は $l = 1$ のときに最小値をとり、その値は 3 である。以上から、 k の最小値は 3 となる。

$$(\text{答}) \quad 3$$



(1) 台形 $ABEF$ の面積 S_1 は、辺 AD の長さを l 、辺 AB の長さを h とおくと

$$S_1 = \left(1 - 2t^2 + t\right) l \times \frac{1}{2} \times h = \frac{\left(1 - 2t^2 + t\right) lh}{2}$$

である。ここで、長方形 $ABCD$ の面積は 1 であるから $lh=1$ である。

$$\text{よって、} S_1 = \frac{-2t^2 + t + 1}{2}$$

$$(\text{答}) \quad S_1 = \frac{-2t^2 + t + 1}{2}$$

(2) $f(t) = -2t^2 + t + 1$ とすると、 $S_1 = \frac{1}{2} f(t)$ である。

また、

$$f(t) = -2 \left(t - \frac{1}{4} \right)^2 + \frac{9}{8}$$

である。

ここで、 $0 < t < \frac{1}{\sqrt{2}}$ であるが、 $t = \frac{1}{4}$ はこの範囲に含まれるので、 $f(t)$ は、 $t = \frac{1}{4}$ のときに最大値 $\frac{9}{8}$ をとる。

よって S_1 は、 $t = \frac{1}{4}$ のときに最大値 $\frac{9}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{16}$ をとる。

$$(\text{答}) \quad \frac{9}{16}$$

(3) $S_2 = 1 - S_1$ であるので、

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{1 - S_1}{S_1} = \frac{1}{S_1} - 1$$

である。ここで先の結果から、 $f(t) = -2t^2 + t + 1$ は、 $t = \frac{1}{4}$ のときに最大値 $\frac{9}{8}$ をとる。

また、

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 + \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad f(0) = 1$$

であるので、 $0 < t < \frac{1}{\sqrt{2}}$ において

$$\frac{1}{\sqrt{2}} < f(t) \leq \frac{9}{8}$$

である。よって、

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} < S_1 = \frac{f(t)}{2} \leq \frac{9}{16}$$

となるので、

$$\frac{16}{9} - 1 = \frac{7}{9} \leq \frac{S_2}{S_1} = \frac{1}{S_1} - 1 < 2\sqrt{2} - 1$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{7}{9} \leq \frac{S_2}{S_1} < 2\sqrt{2} - 1$$

(1)

(i) $2a \leq 0$, つまり $a \leq 0$ のとき $0 \leq x \leq 1$ において

$$f(x) = x^2 - 2ax = (x-a)^2 - a^2$$

であるから,

$$M = f(1) = 1 - 2a$$

(ii) $0 \leq 2a \leq 1$, つまり $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$ のとき,

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2ax = -(x-a)^2 + a^2 & (0 \leq x \leq 2a) \\ x^2 - 2ax = (x-a)^2 - a^2 & (2a \leq x \leq 1) \end{cases}$$

となるので,

 M は $f(a) = a^2$, $f(1) = -2a + 1$ のいずれかである。ここで,

$$f(a) - f(1) = a^2 + 2a - 1 = (a+1+\sqrt{2})(a+1-\sqrt{2})$$

であるから,

 $0 \leq a \leq -1 + \sqrt{2}$ のとき, $f(a) - f(1) \leq 0 \Leftrightarrow f(a) \leq f(1)$ であり, $-1 + \sqrt{2} \leq a \leq \frac{1}{2}$ のとき, $f(a) - f(1) \geq 0 \Leftrightarrow f(a) \geq f(1)$ である。

よって,

$$M = \begin{cases} 1 - 2a & (0 \leq a \leq -1 + \sqrt{2}) \\ a^2 & (-1 + \sqrt{2} \leq a \leq \frac{1}{2}) \end{cases}$$

(iii) $1 \leq 2a$, つまり $\frac{1}{2} \leq a$ のとき

$$f(x) = -x^2 + 2ax = -(x-a)^2 + a^2 \text{ より}$$

 $\frac{1}{2} \leq a \leq 1$ のとき $M = a^2$, $a \geq 1$ のとき $M = f(1) = 2a - 1$ となる。

以上から

$$M = \begin{cases} 1 - 2a & (a \leq -1 + \sqrt{2}) \\ a^2 & (-1 + \sqrt{2} \leq a \leq 1) \\ 2a - 1 & (a \geq 1) \end{cases}$$

$$(\text{答}) \quad M = \begin{cases} 1 - 2a & (a \leq -1 + \sqrt{2}) \\ a^2 & (-1 + \sqrt{2} \leq a \leq 1) \\ 2a - 1 & (a \geq 1) \end{cases}$$

(2)

(i) $a \leq -1 + \sqrt{2}$ のときこのとき M は $a = -1 + \sqrt{2}$ のときに最小値をとり, その値は

$$1 - 2(-1 + \sqrt{2}) = 3 - 2\sqrt{2}$$

である。

(ii) $-1 + \sqrt{2} \leq a \leq 1$ のときこのとき M は $a = -1 + \sqrt{2}$ のときに最小値をとり, その値は

$$(-1 + \sqrt{2})^2 = 3 - 2\sqrt{2}$$

である。

(iii) $a \geq 1$ のときこのとき M は $a = 1$ のときに最小値をとり, その値は 1 である。以上より, $1 > 3 - 2\sqrt{2}$ であることとあわせて, M の最小値は $3 - 2\sqrt{2}$ (答) $3 - 2\sqrt{2}$

(1)

右図のように点 $C \sim F$ を定める。点 A から点 B に達するまでにいくつの点を通じたかで場合わけをすると、

(i) 1つ通過するとき

この場合は $A \rightarrow E \rightarrow B$ のみなので、その確率は

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

(ii) 2つ通過するとき

この場合は $A \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow B$ と $A \rightarrow D \rightarrow F \rightarrow B$, $A \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow B$ の3通りであるから、その確率は、

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{36}$$

(iii) 3つ通過するとき

この場合は $A \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow F \rightarrow B$ と $A \rightarrow D \rightarrow F \rightarrow E \rightarrow B$, $A \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow F \rightarrow B$, $A \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow B$ の4通りであるから、その確率は、

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times 1 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{9}$$

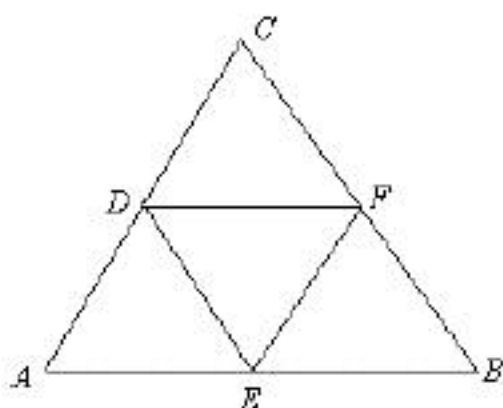
(iv) 4つ通過するとき

この場合は $A \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow F \rightarrow E \rightarrow B$ と $A \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow F \rightarrow B$ の2通りであるからその確率は、

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times 1 \times \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{6}$$

以上からもとめる確率は、

$$\frac{1}{6} + \frac{7}{36} + \frac{2}{9} + \frac{1}{6} = \frac{3}{4}$$

(答) $\frac{3}{4}$

(2)

移動できる点なくなる可能性があるのは、点 C か点 D である。点 C で移動できなくなるのは、点 D と点 F をすでに通過しているときであり、この場合の通過手順は、 $A \rightarrow D \rightarrow F \rightarrow C$, $A \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow D \rightarrow C$, $A \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow C$, $A \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow F \rightarrow C$ の4通りである。また、点 D で移動できなくなるのは、点 C と点 E と点 F をすでに通過しているときなので、この場合の通過手順は、 $A \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow C \rightarrow D$

の1通りである。

このことと(1)での考察から、

(i) 移動回数が2回であるとき、その確率は $\frac{1}{6}$ (ii) 移動回数が3回であるとき、その確率は $\frac{7}{36} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$

(iii) 移動回数が4回であるとき、その確率は

$$\frac{2}{9} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times 1 = \frac{5}{12}$$

(iv) 移動回数が5回であるとき、その確率は $\frac{1}{6}$ 以上からもとめる期待値は $2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{5}{12} + 5 \times \frac{1}{6} = \frac{43}{12}$ (答) $\frac{43}{12}$

(1)

$\overrightarrow{AB}=(1,0,2)$, $\overrightarrow{AC}=(2,1,0)$ であるから, $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{5}$ となる。

また, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}=1 \cdot 2+0 \cdot 1+2 \cdot 0=2$ である。よって,

$$\cos \theta=\frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}|}=\frac{2}{5}$$

であり, $0^{\circ} \leq \theta \leq 180^{\circ}$ より $\sin \theta \geq 0$ であるから,

$$\sin \theta=\sqrt{1-\cos ^2 \theta}=\sqrt{1-\frac{4}{25}}=\frac{\sqrt{21}}{5}$$

$$(\text{答}) \quad \frac{\sqrt{21}}{5}$$

(2)

$\overrightarrow{DH}=s \overrightarrow{DA}+t \overrightarrow{DB}+l \overrightarrow{DC}$ (s, t, l は実数) とすると, H は平面 ABC 上にあるので $s+t+l=1$ である。よって,

$$\overrightarrow{DH}=s \overrightarrow{DA}+t \overrightarrow{DB}+(1-s-t) \overrightarrow{DC}$$

と表すことができる。ここで,

$$\overrightarrow{DA}=(-1,-6,1), \overrightarrow{DB}=(0,-6,3), \overrightarrow{DC}=(1,-5,1)$$

であるから, これを代入して,

$$\overrightarrow{DH}=(1-2s-t,-5-s-t,1+2t) \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。

また, $\overrightarrow{DH}$ は平面 ABC と垂直であるので,

$$\begin{cases} \overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{AB}=0 \\ \overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{AC}=0 \end{cases}$$

が成立する。これと①から,

$$\begin{cases} 1-2s-t+2+4t=0 \\ 2-4s-2t-5-s-t=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3t-2s+3=0 \\ -3t-5s-3=0 \end{cases}$$

これを解くと

$$\begin{cases} s=0 \\ t=-1 \end{cases}$$

となるので, $\overrightarrow{DH}=(2,-4,-1)$

よって $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DH}=(4,3,0)$ から $H(4,3,0)$

$$(\text{答}) \quad (4,3,0)$$

(3)

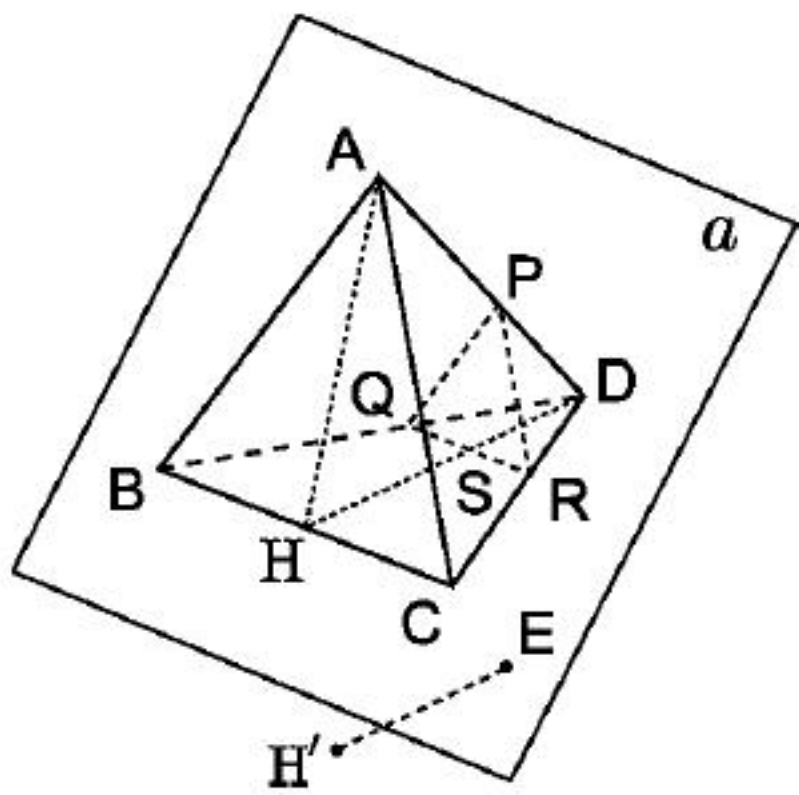
次図のように, 平面 α と AD, BD, CD の交点をそれぞれ P, Q, R , 点 E から平面 ABC へ下ろした垂線の足を H' , さらに α と DH の交点を S とする。

このとき, EH' も SH も平面 α と三角形 ABC に垂直な直線で, その長さは α と三角形 ABC の距離に一致する。つまり $SH=EH'$ である。

ここで,

$\overrightarrow{EH'}=s \overrightarrow{EA}+t \overrightarrow{EB}+l \overrightarrow{EC}$ (s, t, l は実数) として(2)と同様に考えると,

H' は平面 ABC 上にあるので, $s+t+l=1$ である。よって,



$$\overrightarrow{EH'}=s \overrightarrow{EA}+t \overrightarrow{EB}+(1-s-t) \overrightarrow{EC}$$

と表すことができる。また,

$$\overrightarrow{EH'}=(-2s-t,-2-s-t,-1+2t) \quad \cdots \textcircled{2}$$

である。

さらに, $\overrightarrow{EH}$ は平面 ABC と垂直であるので,

$$\begin{cases} \overrightarrow{EH'} \cdot \overrightarrow{AB}=0 \\ \overrightarrow{EH'} \cdot \overrightarrow{AC}=0 \end{cases}$$

が成立する。これと②から,

$$\begin{cases} -2s-t-2+4t=0 \\ -4s-2t-2-s-t=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2s-3t=-2 \\ 5s+3t=-2 \end{cases}$$

これを解くと

$$\begin{cases} s=-\frac{4}{7} \\ t=\frac{2}{7} \end{cases}$$

なので,

$$\overrightarrow{EH'}=\left(\frac{6}{7}, -\frac{12}{7}, -\frac{3}{7}\right)$$

となる。

よって $|\overrightarrow{DH}|=\sqrt{21}$, $|\overrightarrow{EH'}|=SH=\frac{3}{7}\sqrt{21}$ となり, $DS=DH-SH=\frac{4}{7}\sqrt{21}$ であるこ

とがわかる。ここで, 四面体 $ABCD$ と四面体 $PQRD$ は相似であり, そのため三角形 ABC と三角形 PQR も相似で, その面積比は,

$$DH^2:DS^2=(\sqrt{21})^2:\left(\frac{4}{7}\sqrt{21}\right)^2=49:16$$

である。

三角形 ABC の面積は

$$\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| \sin \theta=\frac{\sqrt{21}}{2}$$

であるから, 求める面積は,

$$\frac{\sqrt{21}}{2} \times \frac{16}{49}=\frac{8}{49}\sqrt{21}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{8}{49}\sqrt{21}$$