

(1)
直線 AA' は直線 $y=mx$ と直交するので、 $A'(c,d)$ とおくと

$$m \times \frac{d}{c-a} = -1$$

が成立し、さらに点 A' は直線 $y=mx$ にあるので

$$d=mc$$

が成立する。これら 2 式から

$$\begin{cases} c = \frac{a}{m^2+1} \\ d = \frac{am}{m^2+1} \end{cases}$$

となり、 $P(c,-d)$ なので

$$P\left(\frac{a}{m^2+1}, -\frac{am}{m^2+1}\right)$$

を得る。同様に、 $B'(e,f)$ とすると

$$\begin{cases} m \times \frac{f-b}{e} = -1 \\ f = me \end{cases}$$

よって

$$\begin{cases} e = \frac{mb}{m^2+1} \\ f = \frac{m^2b}{m^2+1} \end{cases}$$

となり、 $Q(-e,f)$ であるから

$$Q\left(-\frac{mb}{m^2+1}, \frac{m^2b}{m^2+1}\right)$$

(答) $P\left(\frac{a}{m^2+1}, -\frac{am}{m^2+1}\right), Q\left(-\frac{mb}{m^2+1}, \frac{m^2b}{m^2+1}\right)$

(2)
 $R(X,Y)$ とおくと、

$$\begin{cases} X = \frac{1}{3} \times \frac{a}{m^2+1} - \frac{2}{3} \times \frac{mb}{m^2+1} = \frac{a-2mb}{3(m^2+1)} \\ Y = -\frac{1}{3} \times \frac{am}{m^2+1} + \frac{2}{3} \times \frac{m^2b}{m^2+1} = \frac{-am+2m^2b}{3(m^2+1)} \end{cases}$$

となる。

(答) $\left(\frac{a-2mb}{3(m^2+1)}, \frac{-am+2m^2b}{3(m^2+1)}\right)$

(3)

$$Y = \frac{-am+2m^2b}{3(m^2+1)} = -mX$$

であるから、 $X \neq 0$ のときは、

$$m = -\frac{Y}{X} \qquad \dots \textcircled{1}$$

である。これを $X = \frac{a-2mb}{3(m^2+1)}$ に代入して

$$\left(X - \frac{1}{6}a\right)^2 + \left(Y - \frac{1}{3}b\right)^2 = \frac{a^2+4b^2}{36} \qquad \dots \textcircled{2}$$

となる。

なお、 $X=0$ のとき、つまり $m = \frac{a}{2b}$ のとき、このときは $Y=0$ であり、これは②上の点である。また、①と $m>0$ から、 Y と X は異符号である。

ここで $f(m) = X = \frac{a-2mb}{3(m^2+1)}$ とおくと

$$f'(m) = \frac{2}{3} \times \frac{bm^2-am-b}{(m^2+1)^2}$$

より、 $f'(m)$ の分母は常に正なので、 $f'(m)$ の正負は分子の正負に一致する。また、

$$bm^2-am-b=0 \Leftrightarrow m = \frac{a \pm \sqrt{a^2+4b^2}}{2b}$$

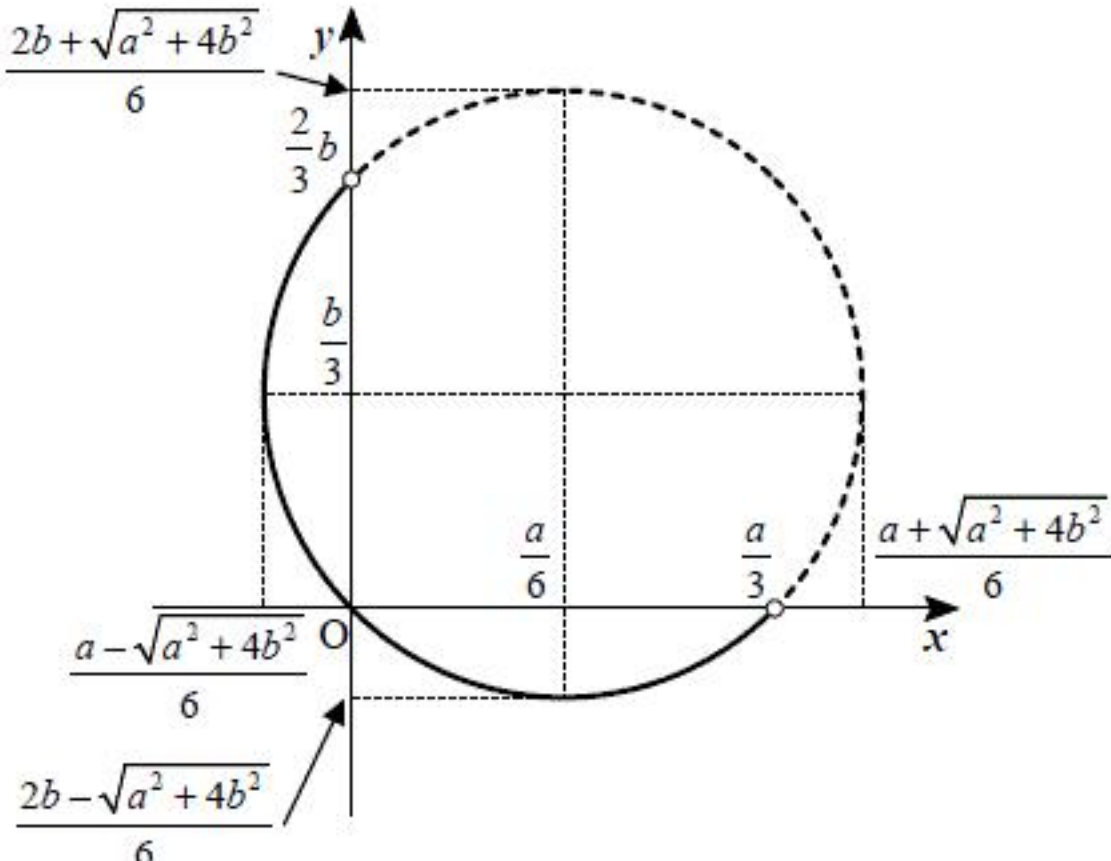
である。よってこれらから、 $f(m)$ の増減表は下のようになる。

m	(0)	...	$\frac{a+\sqrt{a^2+4b^2}}{2b}$	...
$f'(m)$		-	0	+
$f(m)$	$\left(\frac{a}{3}\right)$	$\searrow$	$\frac{1}{6}(a-\sqrt{a^2+4b^2})$	$\nearrow$

また

$$\lim_{m \rightarrow \infty} f(m) = 0$$

である。
よって以上のことと、 $Y = -mX$ であること、そしてこれから X と Y は異符号であることを考えて、もとめる R の軌跡は次図のようになる。なお、端点は含まない。



(1)

円錐の高さを h とおくと、三平方の定理から

$$h = \sqrt{r^2 - x^2}$$

よって、円錐の体積は

$$V = \pi x^2 \times h \times \frac{1}{3} = \frac{\pi}{3} x^2 \sqrt{r^2 - x^2}$$

となる。ここで、

$$f(x) = x^2 \sqrt{r^2 - x^2}$$

とすると、

$$f'(x) = 2x\sqrt{r^2 - x^2} - x^2 \frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{x(2r^2 - 3x^2)}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

であるから、

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(2r^2 - 3x^2) = 0 \therefore x = \sqrt{\frac{2}{3}} r \quad (\because x > 0)$$

より、増減表は以下のようになる。

x	(0)	$\cdots$	$\sqrt{\frac{2}{3}} r$	$\cdots$	(r)
$f'(x)$	(0)	+	0	-	
$f(x)$	(0)	$\nearrow$	$\frac{2\sqrt{3}}{27} r^3$	$\searrow$	

よって V は、 $x = \sqrt{\frac{2}{3}} r$ のとき最大値

$$\frac{2\sqrt{3}}{27} \pi r^3$$

をとる。

$$(\text{答}) \quad x = \frac{\sqrt{6}}{3} r \text{ のとき, 最大値 } \frac{2\sqrt{3}}{27} \pi r^3$$

(2)

展開図の扇形の中心角を θ とおくと

$$2x\pi = r\theta$$

 $\cdots \textcircled{1}$

の関係がある。また側面積は、

$$\pi r^2 \times \frac{\theta}{2\pi} = \frac{1}{2} r^2 \theta$$

であるから、①とあわせて側面積は、

$$\pi x r$$

であることがわかる。よって、

$$S = \pi x r + \pi x^2 = \pi x(x + r)$$

となるので、

$$Q = \frac{\left(\frac{\pi}{3} \sqrt{x^4(r^2 - x^2)} \right)^2}{\left\{ \pi x(x + r) \right\}^3} = \frac{x(r^2 - x^2)}{9\pi(x + r)^3} = \frac{1}{9\pi} \cdot \frac{x(r - x)}{(r + x)^2}$$

である。ここで、 $g(x) = \frac{x(r - x)}{(r + x)^2}$

とおくと、

$$g'(x) = \frac{(r - 2x)(r + x) - 2rx + 2x^2}{(x + r)^3} = \frac{r(r - 3x)}{(x + r)^3}$$

であるので、

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow r - 3x = 0 \therefore x = \frac{1}{3} r$$

となる。これより、 $g(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{3} r$	$\cdots$	(r)
$g'(x)$		+	0	-	
$g(x)$		$\nearrow$	$\frac{1}{8}$	$\searrow$	

よって Q は、 $x = \frac{1}{3} r$ のとき、最大値

$$\frac{1}{9\pi} g\left(\frac{1}{3} r\right) = \frac{1}{72\pi}$$

をとる。

$$(\text{答}) \quad x = \frac{1}{3} r \text{ のとき, 最大値 } \frac{1}{72\pi}$$

(1)

(i) $2a \leq 0$, つまり $a \leq 0$ のとき $0 \leq x \leq 1$ において

$$f(x) = x^2 - 2ax = (x-a)^2 - a^2$$

であるから,

$$M = f(1) = 1 - 2a$$

(ii) $0 \leq 2a \leq 1$, つまり $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$ のとき,

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2ax = -(x-a)^2 + a^2 & (0 \leq x \leq 2a) \\ x^2 - 2ax = (x-a)^2 - a^2 & (2a \leq x \leq 1) \end{cases}$$

となるので,

 M は $f(a) = a^2$, $f(1) = -2a + 1$ のいずれかである。ここで,

$$f(a) - f(1) = a^2 + 2a - 1 = (a+1+\sqrt{2})(a+1-\sqrt{2})$$

であるから,

 $0 \leq a \leq -1 + \sqrt{2}$ のとき, $f(a) - f(1) \leq 0 \Leftrightarrow f(a) \leq f(1)$ であり, $-1 + \sqrt{2} \leq a \leq \frac{1}{2}$ のとき, $f(a) - f(1) \geq 0 \Leftrightarrow f(a) \geq f(1)$ である。

よって,

$$M = \begin{cases} 1 - 2a & (0 \leq a \leq -1 + \sqrt{2}) \\ a^2 & (-1 + \sqrt{2} \leq a \leq \frac{1}{2}) \end{cases}$$

(iii) $1 \leq 2a$, つまり $\frac{1}{2} \leq a$ のとき

$$f(x) = -x^2 + 2ax = -(x-a)^2 + a^2 \text{ より}$$

 $\frac{1}{2} \leq a \leq 1$ のとき $M = a^2$, $a \geq 1$ のとき $M = f(1) = 2a - 1$ となる。

以上から

$$M = \begin{cases} 1 - 2a & (a \leq -1 + \sqrt{2}) \\ a^2 & (-1 + \sqrt{2} \leq a \leq 1) \\ 2a - 1 & (a \geq 1) \end{cases}$$

$$(答) \quad M = \begin{cases} 1 - 2a & (a \leq -1 + \sqrt{2}) \\ a^2 & (-1 + \sqrt{2} \leq a \leq 1) \\ 2a - 1 & (a \geq 1) \end{cases}$$

(2)

(i) $a \leq -1 + \sqrt{2}$ のときこのとき M は $a = -1 + \sqrt{2}$ のときに最小値をとり, その値は

$$1 - 2(-1 + \sqrt{2}) = 3 - 2\sqrt{2}$$

である。

(ii) $-1 + \sqrt{2} \leq a \leq 1$ のときこのとき M は $a = -1 + \sqrt{2}$ のときに最小値をとり, その値は

$$(-1 + \sqrt{2})^2 = 3 - 2\sqrt{2}$$

である。

(iii) $a \geq 1$ のときこのとき M は $a = 1$ のときに最小値をとり, その値は 1 である。以上より, $1 > 3 - 2\sqrt{2}$ であることとあわせて, M の最小値は $3 - 2\sqrt{2}$ (答) $3 - 2\sqrt{2}$

(1)

右図のように点 $C \sim F$ を定める。

点 A から点 B に達するまでにいくつの点を通じたかで場合わけをすると、

(i) 1つ通過するとき

この場合は $A \rightarrow E \rightarrow B$ のみなので、その確率は

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

(ii) 2つ通過するとき

この場合は $A \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow B$ と $A \rightarrow D \rightarrow F \rightarrow B$, $A \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow B$ の3通りであるから、その確率は、

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{36}$$

(iii) 3つ通過するとき

この場合は $A \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow F \rightarrow B$ と $A \rightarrow D \rightarrow F \rightarrow E \rightarrow B$, $A \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow F \rightarrow B$, $A \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow B$ の4通りであるから、その確率は、

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times 1 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{9}$$

(iv) 4つ通過するとき

この場合は $A \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow F \rightarrow E \rightarrow B$ と $A \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow F \rightarrow B$ の2通りであるからその確率は、

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times 1 \times \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{6}$$

以上からもとめる確率は、

$$\frac{1}{6} + \frac{7}{36} + \frac{2}{9} + \frac{1}{6} = \frac{3}{4}$$

$$(\text{答}) \quad \frac{3}{4}$$

(2)

移動できる点なくなる可能性があるのは、点 C か点 D である。

点 C で移動できなくなるのは、点 D と点 F をすでに通過しているときであり、この場合の通過手順は、

$A \rightarrow D \rightarrow F \rightarrow C$, $A \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow D \rightarrow C$, $A \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow C$, $A \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow F \rightarrow C$ の4通りである。

また、点 D で移動できなくなるのは、点 C と点 E と点 F をすでに通過しているときなので、この場合の通過手順は、

$A \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow C \rightarrow D$

の1通りである。

このことと(1)での考察から、

(i) 移動回数が2回であるとき、その確率は $\frac{1}{6}$

(ii) 移動回数が3回であるとき、その確率は $\frac{7}{36} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$

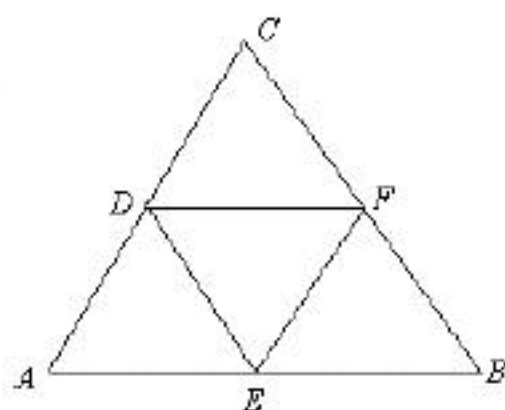
(iii) 移動回数が4回であるとき、その確率は

$$\frac{2}{9} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times 1 = \frac{5}{12}$$

(iv) 移動回数が5回であるとき、その確率は $\frac{1}{6}$

以上からもとめる期待値は $2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{5}{12} + 5 \times \frac{1}{6} = \frac{43}{12}$

$$(\text{答}) \quad \frac{43}{12}$$



5

(1) $\overrightarrow{AB}=(1,0,2)$, $\overrightarrow{AC}=(2,1,0)$ であるから, $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{5}$ となる。

また, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}=1 \cdot 2+0 \cdot 1+2 \cdot 0=2$ である。よって,

$$\cos \theta=\frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}|}=\frac{2}{5}$$

以上から,

$$\sin \theta=\sqrt{1-\frac{4}{25}}=\frac{\sqrt{21}}{5}$$

(答) $\frac{\sqrt{21}}{5}$

(2) $\overrightarrow{DH}=s \overrightarrow{DA}+t \overrightarrow{DB}+l \overrightarrow{DC}$ (s, t, l は実数) とすると, H は平面 ABC 上にあるので $s+t+l=1$ である。よって,

$$\overrightarrow{DH}=s \overrightarrow{DA}+t \overrightarrow{DB}+(1-s-t) \overrightarrow{DC}$$

と表すことができる。ここで,

$$\overrightarrow{DA}=(-1,-6,1), \overrightarrow{DB}=(0,-6,3), \overrightarrow{DC}=(1,-5,1)$$

であるから, これを代入して,

$$\overrightarrow{DH}=(1-2 s-t,-5-s-t, 1+2 t) \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。

また, $\overrightarrow{DH}$ は平面 ABC と垂直であるので,

$$\begin{cases} \overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{AB}=0 \\ \overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{AC}=0 \end{cases}$$

が成立する。これと①から,

$$\begin{cases} 1-2 s-t+2+4 t=0 \\ 2-4 s-2 t-5-s-t=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 t-2 s+3=0 \\ -3 t-5 s-3=0 \end{cases}$$

これを解くと

$$\begin{cases} s=0 \\ t=-1 \end{cases}$$

となるので, $\overrightarrow{DH}=(2,-4,-1)$

よって $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DH}=(4,3,0)$ から $H(4,3,0)$

(答) $(4,3,0)$

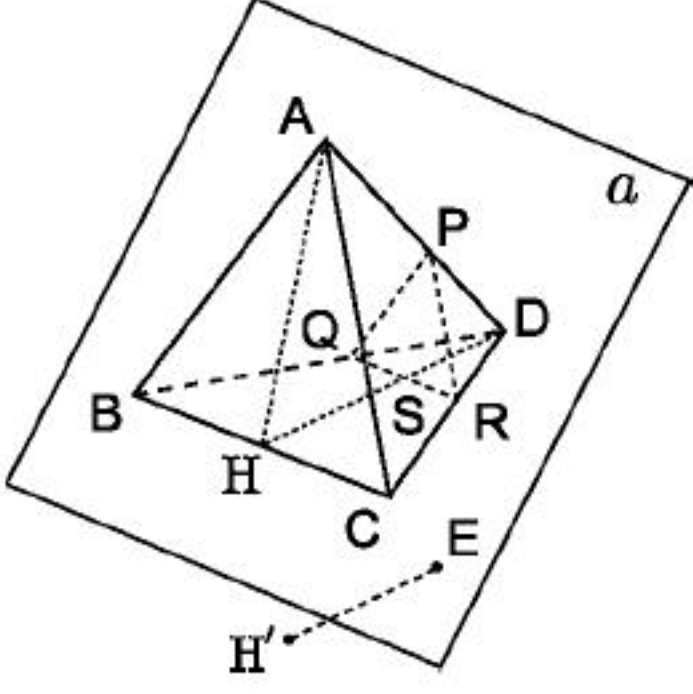
(3) 次図のように, 平面 α と AD, BD, CD の交点をそれぞれ P, Q, R , 点 E から平面 ABC へ下ろした垂線の足を H' , さらに α と DH の交点を S とする。

このとき, EH' も SH も平面 α と三角形 ABC に垂直な直線で, その長さは α と三角形 ABC の距離に一致する。つまり $SH=EH'$ である。

ここで,

$$\overrightarrow{EH'}=s \overrightarrow{EA}+t \overrightarrow{EB}+l \overrightarrow{EC} \quad (s, t, l \text{ は実数})$$

として(2)と同様に考えると, H' は平面 ABC 上にあるので, $s+t+l=1$ である。よって,



$$\overrightarrow{EH'}=s \overrightarrow{EA}+t \overrightarrow{EB}+(1-s-t) \overrightarrow{EC}$$

と表すことができる。また,

$$\overrightarrow{EH'}=(-2 s-t,-2-s-t,-1+2 t) \quad \cdots \textcircled{2}$$

である。

さらに, $\overrightarrow{EH}$ は平面 ABC と垂直であるので,

$$\begin{cases} \overrightarrow{EH'} \cdot \overrightarrow{AB}=0 \\ \overrightarrow{EH'} \cdot \overrightarrow{AC}=0 \end{cases}$$

が成立する。これと②から,

$$\begin{cases} -2 s-t-2+4 t=0 \\ -4 s-2 t-2-s-t=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 s-3 t=-2 \\ 5 s+3 t=-2 \end{cases}$$

これを解くと

$$\begin{cases} s=-\frac{4}{7} \\ t=\frac{2}{7} \end{cases}$$

なので,

$$\overrightarrow{EH'}=\left(\frac{6}{7},-\frac{12}{7},-\frac{3}{7}\right)$$

となる。

よって $|\overrightarrow{DH}|=\sqrt{21}$, $|\overrightarrow{EH'}|=SH=\frac{3}{7} \sqrt{21}$ となる。

ここで, 四面体 $ABCD$ と四面体 $PQRD$ は相似であり, そのため三角形 ABC と三角形 PQR も相似で, その面積比は,

$$DH^2:DS^2=(\sqrt{21})^2:\left(\frac{4}{7} \sqrt{21}\right)^2=49:16$$

である。

三角形 ABC の面積は

$$\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| \sin \theta=\frac{\sqrt{21}}{2}$$

であるから, もとめる面積は,

$$\frac{\sqrt{21}}{2} \times \frac{16}{49}=\frac{8}{49} \sqrt{21}$$

となる。

(答) $\frac{8}{49} \sqrt{21}$