

1

(1)

条件(*)より,

$$\frac{x+b}{x^3+1} < \frac{x+2b+d}{x^3+2}$$

$$\Leftrightarrow (x^3+2)(x+b) < (x^3+1)(x+2b+d) \quad (\because x > 0 \text{ のとき } x^3+1 > 0, x^3+2 > 0)$$

$$\Leftrightarrow (b+d)x^3 - x + d > 0$$

となる。ここで、 $f(x) = (b+d)x^3 - x + d$ とすると、条件(*)は

$$\text{「すべての正の実数 } x \text{ に対して } f(x) > 0 \text{ である} \text{」} \quad \dots \text{ ①}$$

と言い換えることができる。

$b+d \leq 0$ と仮定すると,

$$f'(x) = 3(b+d)x^2 - 1 < 0$$

より $f(x)$ は単調減少で,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$$

となり、これは①に反する。よって、 $b+d > 0$ であることが必要である。

(証明終)

(2)

$b+d > 0$ のもとで増減表を書くと、次のようになる。

x	(0)	$\dots$	$\frac{1}{\sqrt{3(b+d)}}$	$\dots$
$f'(x)$	$\diagdown$	$-$	0	$+$
$f(x)$	(d)	$\searrow$		$\nearrow$

$d \leq 0$ と仮定すると,

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3(b+d)}}\right) < 0$$

となり、これは①に反する。よって $d > 0$ であることが必要である。

(証明終)

(3)

(2)の増減表より,

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3(b+d)}}\right) > 0$$

が①が成り立つための必要十分条件である。ここで,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{\sqrt{3(b+d)}}\right) &= (b+d)\left(\frac{1}{\sqrt{3(b+d)}}\right)^3 - \left(\frac{1}{\sqrt{3(b+d)}}\right) + d \\ &= d - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3(b+d)}} \end{aligned}$$

であるから、条件(*)が成立するための必要十分条件は,

$$d - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3(b+d)}} > 0$$

を b について解いて,

$$b > \frac{4}{27d^2} - d$$

となる。

$$\text{(答)} \quad b > \frac{4}{27d^2} - d$$

2

(1)

$n=5$ のとき、 $b-a=c-b$ となる組み合わせは

$$(a, b, c) = (1, 2, 3), (2, 3, 4), (3, 4, 5), (1, 3, 5)$$

の 4 通りがある。カードの取り出し方は全部で

$${}_5C_3 = 10 \text{ 通り}$$

なので、

$$p_5 = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad p_5 = \frac{2}{5}$$

(2)

$n=6$ のとき、 $b-a=c-b$ となる組み合わせは

$$(a, b, c) = (1, 2, 3), (2, 3, 4), (3, 4, 5), (4, 5, 6), (1, 3, 5), (2, 4, 6)$$

の 6 通りがある。カードの取り出し方は全部で

$${}_6C_3 = 20 \text{ 通り}$$

なので、

$$p_6 = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad p_6 = \frac{3}{10}$$

(3)

$b-a=c-b=k$ とおくと、 k は自然数で

$$b = a + k$$

$$c = a + 2k$$

であり、 a, b, c は 1 から n までの自然数なので、

$$a \geq 1, \quad c = a + 2k \leq n$$

が成り立つ必要がある。すなわち、

$$1 \leq a \leq n - 2k \quad \dots \textcircled{1}$$

である。①を満たす a, k の組み合わせの個数が、 $b-a=c-b$ を満たす a, b, c の組み合わせの個数に対応する。

n が奇数のとき、 k のとり得る範囲は

$$1 \leq k = \frac{n-a}{2} \leq \frac{n-1}{2}$$

である。よって $b-a=c-b$ を満たす a, b, c の組み合わせの個数は

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} (n-2k) &= \frac{n(n-1)}{2} - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{n-1}{2} \left(\frac{n-1}{2} + 1 \right) \\ &= \frac{(n-1)^2}{4} \end{aligned}$$

である。またカードの取り出し方は全部で

$${}_nC_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \text{ 通り}$$

なので、

$$p_n = \frac{\frac{(n-1)^2}{4}}{\frac{n(n-1)(n-2)}{6}} = \frac{3(n-1)}{2n(n-2)}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad p_n = \frac{3(n-1)}{2n(n-2)}$$

(4)

(3)と同様に、①を満たす a, k の組み合わせの個数が、 $b-a=c-b$ を満たす a, b, c の組み合わせの個数に対応する。

n が偶数なので k のとり得る範囲は

$$1 \leq k \leq \frac{n-2}{2}$$

である。よって $b-a=c-b$ を満たす a, b, c の組み合わせの個数は

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\frac{n-2}{2}} (n-2k) &= \frac{n(n-2)}{2} - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{n-2}{2} \left(\frac{n-2}{2} + 1 \right) \\ &= \frac{n(n-2)}{4} \end{aligned}$$

である。また(3)と同様にカードの取り出し方は全部で

$${}_nC_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \text{ 通り}$$

なので、

$$p_n = \frac{\frac{n(n-2)}{4}}{\frac{n(n-1)(n-2)}{6}} = \frac{3}{2(n-1)}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad p_n = \frac{3}{2(n-1)}$$

3

(1)

$\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OF}$ をそれぞれ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を用いて表すと

$$\overrightarrow{OD} = \frac{1}{3}\vec{a}$$

$$\overrightarrow{OE} = \frac{1}{2}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{OF} = \frac{\vec{b} + 2\vec{c}}{3}$$

となる。点 G が平面 α 上にあることから、 $\overrightarrow{OG}$ は実数 s, t を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OG} &= s\overrightarrow{OD} + t\overrightarrow{OE} + (1-s-t)\overrightarrow{OF} \\ &= \frac{s}{3}\vec{a} + \frac{t}{2}\vec{b} + (1-s-t)\frac{\vec{b} + 2\vec{c}}{3} \\ &= \frac{s}{3}\vec{a} + \frac{2-2s+t}{6}\vec{b} + \frac{2(1-s-t)}{3}\vec{c}\end{aligned}$$

と表される。ここで、点 G が辺 AC 上にあることから、

$$\frac{2-2s+t}{6} = 0 \quad \dots\dots ①$$

$$\frac{s}{3} + \frac{2(1-s-t)}{3} = 1 \quad \dots\dots ②$$

である。①, ②を連立して解くと、

$$s = \frac{3}{5}, t = -\frac{4}{5}$$

となる。よって

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{5}\vec{a} + \frac{4}{5}\vec{c}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OG} = \frac{1}{5}\vec{a} + \frac{4}{5}\vec{c}$$

(2)

点 H が平面 α 上にあることより、 $\overrightarrow{OH}$ は実数 u, v を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OH} &= u\overrightarrow{OD} + v\overrightarrow{OE} + (1-u-v)\overrightarrow{OF} \\ &= \frac{u}{3}\vec{a} + \frac{2-2u+v}{6}\vec{b} + \frac{2(1-u-v)}{3}\vec{c}\end{aligned}$$

と表される。ここで、点 H が辺 OC 上にあることから

$$\frac{u}{3} = 0 \quad \dots\dots ③$$

$$\frac{2-2u+v}{6} = 0 \quad \dots\dots ④$$

である。③, ④を連立して解くと

$$u = 0, v = -2$$

となる。よって $\overrightarrow{OH}$ は

$$\overrightarrow{OH} = 2\vec{c}$$

となる。したがって

$$OC:CH = 1:1$$

である。

$$(\text{答}) \quad OC:CH = 1:1$$

(3)

四面体 OABC の体積を V 、四面体 ODEH の体積を V_1 、四面体 CFGH の体積を V_2 とする。このとき、四面体 OABC を平面 α で分けたときに点 O を含む方の立体の体積は $V_1 - V_2$ と表せる。

$$\begin{aligned}V_1 &= \frac{OD}{OA} \cdot \frac{OE}{OB} \cdot \frac{OH}{OC} \cdot V \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{1} \cdot V \\ &= \frac{1}{3}V\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V_2 &= \frac{CG}{CA} \cdot \frac{CF}{CB} \cdot \frac{CH}{CO} \cdot V \\ &= \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1} \cdot V \\ &= \frac{1}{15}V\end{aligned}$$

なので、

$$\begin{aligned}V_1 - V_2 &= \frac{1}{3}V - \frac{1}{15}V \\ &= \frac{4}{15}V\end{aligned}$$

となる。よって、四面体 OABC を平面 α で分けたときの 2 つの立体の体積比は

$$\left\{V - (V_1 - V_2)\right\} : (V_1 - V_2) = \left(1 - \frac{4}{15}V\right) : \frac{4}{15}V = 11:4$$

である。

$$(\text{答}) \quad 11:4$$

〔Ⅰ〕

$0 < \theta < \pi, \theta \neq \frac{\pi}{2}$ より $0 < \sin \theta < 1$ である。このもとで与不等式を変形すると、

$$\tan^2 \theta > \sin \theta$$

$$\frac{\sin^2 \theta}{1 - \sin^2 \theta} > \sin \theta$$

$$\sin \theta > 1 - \sin^2 \theta \quad (\because 1 - \sin^2 \theta > 0)$$

$$\sin^2 \theta + \sin \theta - 1 > 0$$

$$\therefore \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} < \sin \theta < 1 \quad (\because 0 < \sin \theta < 1)$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} < \sin \theta < 1$$

〔Ⅱ〕

(1)

与式を変形すると

$$\sin \theta \cdot \log_c a - \cos \theta \cdot \log_c b = R \sin(\theta + \beta) \quad \dots \textcircled{1}$$

①に $\theta = 0$ を代入すると

$$-\log_c b = R \sin \beta \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。①に $\theta = \frac{\pi}{2}$ を代入すると

$$\log_c a = R \cos \beta \quad \dots \textcircled{3}$$

となる。②、③をそれぞれ2乗したものを辺々加えると、

$$\begin{aligned} (\log_c b)^2 + (\log_c a)^2 &= R^2 \\ \therefore R &= \sqrt{(\log_c b)^2 + (\log_c a)^2} \quad (\because R > 0) \end{aligned}$$

これを②、③に代入すると $\sin \beta, \cos \beta$ は

$$\begin{aligned} \sin \beta &= -\frac{\log_c b}{\sqrt{(\log_c b)^2 + (\log_c a)^2}} \\ \cos \beta &= \frac{\log_c a}{\sqrt{(\log_c b)^2 + (\log_c a)^2}} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \left\{ \begin{array}{l} R = \sqrt{(\log_c b)^2 + (\log_c a)^2} \\ \sin \beta = -\frac{\log_c b}{\sqrt{(\log_c b)^2 + (\log_c a)^2}} \\ \cos \beta = \frac{\log_c a}{\sqrt{(\log_c b)^2 + (\log_c a)^2}} \end{array} \right.$$

(2)

(1)の結果に $a = c, b = c^{\sqrt{3}}$ を代入すると

$$\sin \beta = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2}} = \frac{1}{2}$$

となる。 $0 \leq \beta < 2\pi$ なので

$$\beta = \frac{5}{3}\pi$$

である。

$$(\text{答}) \quad \beta = \frac{5}{3}\pi$$

5

(1)

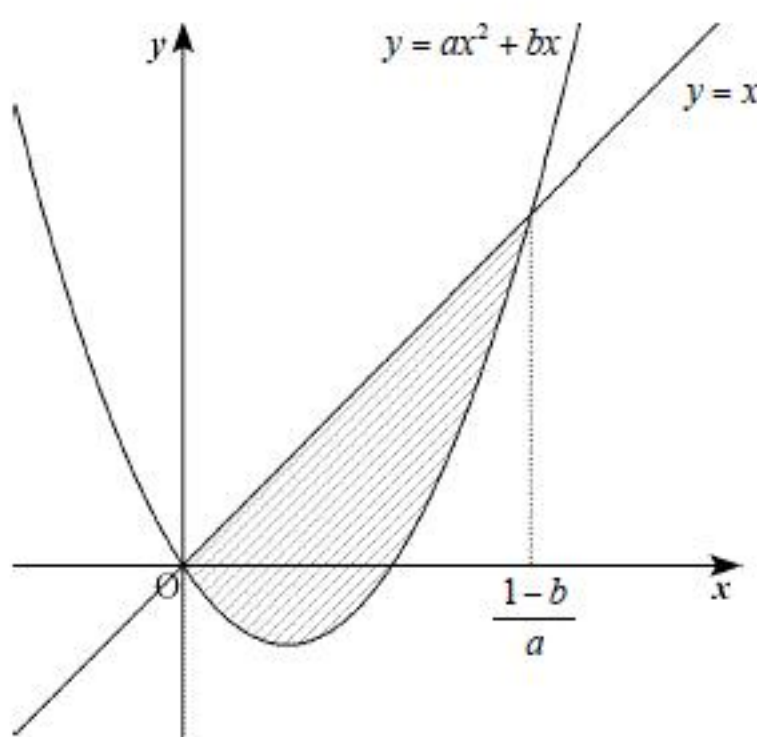
C_1, C_2 のグラフの交点の x 座標は

$$x = ax^2 + bx$$

より,

$$x = 0, \frac{1-b}{a}$$

である。よって C_1 と C_2 の囲む図形は次の斜線部のようになる。



よって

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{1-b}{a}} \left\{ x - (ax^2 + bx) \right\} dx \\ &= -a \int_0^{\frac{1-b}{a}} x \left(x - \frac{1-b}{a} \right) dx \\ &= \frac{a}{6} \left(\frac{1-b}{a} \right)^3 \\ &= \frac{(1-b)^3}{6a^2} \end{aligned}$$

となる。 $a > 0$ より, これを変形すると

$$a = \sqrt{\frac{(1-b)^3}{6S}}$$

となる。

$$(答) \ a = \sqrt{\frac{(1-b)^3}{6S}}$$

(2)

(1)より

$$p_1 = q_1 = 0, p_2 = q_2 = \frac{1-b}{a}$$

なので

$$L = p_2 - p_1 = \frac{1-b}{a}$$

である。また,

$$ax^2 + bx = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a}$$

と

$$a > 0, p_1 < -\frac{b}{2a} < p_2$$

より,

$$T = \left| -\frac{b^2}{4a} \right| = \frac{b^2}{4a}$$

である。(1)の結果も用いて,

$$\begin{aligned} \frac{T-L}{L^3} &= \frac{\frac{b^2}{4a} - \left(\frac{1-b}{a} \right)}{\left(\frac{1-b}{a} \right)^3} \\ &= \frac{(b^2 + 4b - 4)a^2}{4(1-b)^3} \\ &= \frac{(b^2 + 4b - 4)}{4(1-b)^3} \cdot \frac{(1-b)^3}{6S} \\ &= \frac{(b^2 + 4b - 4)}{24S} \\ &= \frac{(b+2)^2}{24S} - \frac{1}{3S} \end{aligned}$$

となるので, $b = -2$ のとき $\frac{T-L}{L^3}$ は最小値 $-\frac{1}{3S}$ をとる。

$$(答) \ -\frac{1}{3S}$$