

1

(1)

条件(*)より,

$$\frac{x+b}{x^3+1} < \frac{x+2b+d}{x^3+2}$$

$$\Leftrightarrow (x^3+2)(x+b) < (x^3+1)(x+2b+d) \quad (\because x>0 \text{ のとき } x^3+1>0, x^3+2>0)$$

$$\Leftrightarrow (b+d)x^3 - x + d > 0$$

ここで, $f(x) = (b+d)x^3 - x + d$ とすると, 条件(*)は

$$\text{「すべての正の実数 } x \text{ に対して } f(x) > 0 \text{ である} \text{」} \quad \dots \text{①}$$

と言い換えることができる。

$b+d \leq 0$ と仮定すると,

$$f'(x) = 3(b+d)x^2 - 1 < 0$$

より $f(x)$ は単調減少で,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$$

となり, これは①に反する。よって, $b+d > 0$ であることが必要である。

(証明終)

(2)

$b+d > 0$ のもとで増減表を書くと, 次のようになる。

x	(0)	$\dots$	$\frac{1}{\sqrt{3(b+d)}}$	$\dots$
$f'(x)$	$\diagup$	$-$	0	$+$
$f(x)$	(d)	$\searrow$		$\nearrow$

$d \leq 0$ と仮定すると,

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3(b+d)}}\right) < 0$$

となり, これは①に反する。よって $d > 0$ であることが必要である。

(証明終)

(3)

(2)の増減表より,

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3(b+d)}}\right) > 0$$

が①が成り立つための必要十分条件である。ここで,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{\sqrt{3(b+d)}}\right) &= (b+d)\left(\frac{1}{\sqrt{3(b+d)}}\right)^3 - \left(\frac{1}{\sqrt{3(b+d)}}\right) + d \\ &= d - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3(b+d)}} \end{aligned}$$

であるから, 条件(*)が成立するための必要十分条件は,

$$d - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3(b+d)}} > 0$$

を b について解いて,

$$b > \frac{4}{27d^2} - d$$

となる。

$$\text{(答)} \quad b > \frac{4}{27d^2} - d$$

2

(1)

$n=5$ のとき、 $b-a=c-b$ となる組み合わせは

$$(a, b, c) = (1, 2, 3), (2, 3, 4), (3, 4, 5), (1, 3, 5)$$

の 4 通りがある。カードの取り出し方は全部で

$${}_5C_3 = 10 \text{ 通り}$$

なので、

$$p_5 = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad p_5 = \frac{2}{5}$$

(2)

$n=6$ のとき、 $b-a=c-b$ となる組み合わせは

$$(a, b, c) = (1, 2, 3), (2, 3, 4), (3, 4, 5), (4, 5, 6), (1, 3, 5), (2, 4, 6)$$

の 6 通りがある。カードの取り出し方は全部で

$${}_6C_3 = 20 \text{ 通り}$$

なので、

$$p_6 = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad p_6 = \frac{3}{10}$$

(3)

$b-a=c-b=k$ とおくと、 k は自然数で

$$b = a + k$$

$$c = a + 2k$$

であり、 a, b, c は 1 から n までの自然数なので、

$$a \geq 1, \quad c = a + 2k \leq n$$

が成り立つ必要がある。すなわち、

$$1 \leq a \leq n - 2k \quad \cdots \textcircled{1}$$

である。①を満たす a, k の組み合わせの個数が、 $b-a=c-b$ を満たす a, b, c の組み合わせの個数に対応する。

n が奇数のとき、 k のとり得る範囲は

$$1 \leq k = \frac{n-a}{2} \leq \frac{n-1}{2}$$

である。よって $b-a=c-b$ を満たす a, b, c の組み合わせの個数は

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} (n-2k) &= \frac{n(n-1)}{2} - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{n-1}{2} \left(\frac{n-1}{2} + 1 \right) \\ &= \frac{(n-1)^2}{4} \end{aligned}$$

である。またカードの取り出し方は全部で

$${}_nC_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \text{ 通り}$$

なので、

$$p_n = \frac{\frac{(n-1)^2}{4}}{\frac{n(n-1)(n-2)}{6}} = \frac{3(n-1)}{2n(n-2)}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad p_n = \frac{3(n-1)}{2n(n-2)}$$

(4)

(3)と同様に、①を満たす a, k の組み合わせの個数が、 $b-a=c-b$ を満たす a, b, c の組み合わせの個数に対応する。

n が偶数なので k のとり得る範囲は

$$1 \leq k \leq \frac{n-2}{2}$$

である。よって $b-a=c-b$ を満たす a, b, c の組み合わせの個数は

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\frac{n-2}{2}} (n-2k) &= \frac{n(n-2)}{2} - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{n-2}{2} \left(\frac{n-2}{2} + 1 \right) \\ &= \frac{n(n-2)}{4} \end{aligned}$$

である。また(3)と同様にカードの取り出し方は全部で

$${}_nC_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \text{ 通り}$$

なので、

$$p_n = \frac{\frac{n(n-2)}{4}}{\frac{n(n-1)(n-2)}{6}} = \frac{3}{2(n-1)}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad p_n = \frac{3}{2(n-1)}$$

3

(1)

$\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OF}$ をそれぞれ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を用いて表すと

$$\overrightarrow{OD} = \frac{1}{3} \vec{a}$$

$$\overrightarrow{OE} = \frac{1}{2} \vec{b}$$

$$\overrightarrow{OF} = \frac{\vec{b} + 2\vec{c}}{3}$$

となる。点 G が平面 上にあることから、 $\overrightarrow{OG}$ は実数 s, t を用いて

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OG} &= s\overrightarrow{OD} + t\overrightarrow{OE} + (1-s-t)\overrightarrow{OF} \\ &= \frac{s}{3}\vec{a} + \frac{t}{2}\vec{b} + (1-s-t)\frac{\vec{b} + 2\vec{c}}{3} \\ &= \frac{s}{3}\vec{a} + \frac{2-2s+t}{6}\vec{b} + \frac{2(1-s-t)}{3}\vec{c} \end{aligned}$$

と表される。ここで、点 G が辺 AC 上にあることから、

$$\frac{2-2s+t}{6} = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\frac{s}{3} + \frac{2(1-s-t)}{3} = 1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

である。①, ②を連立して解くと、

$$s = \frac{3}{5}, t = -\frac{4}{5}$$

となる。よって

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{5}\vec{a} + \frac{4}{5}\vec{c}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \overrightarrow{OG} = \frac{1}{5}\vec{a} + \frac{4}{5}\vec{c}$$

(2)

点 H が平面 α 上にあることより、 $\overrightarrow{OH}$ は実数 u, v を用いて

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OH} &= u\overrightarrow{OD} + v\overrightarrow{OE} + (1-u-v)\overrightarrow{OF} \\ &= \frac{u}{3}\vec{a} + \frac{2-2u+v}{6}\vec{b} + \frac{2(1-u-v)}{3}\vec{c} \end{aligned}$$

と表される。ここで、点 H が辺 OC 上にあることから

$$\frac{u}{3} = 0 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$$\frac{2-2u+v}{6} = 0 \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

である。③, ④を連立して解くと

$$u = 0, v = -2$$

となる。よって $\overrightarrow{OH}$ は

$$\overrightarrow{OH} = 2\vec{c}$$

となる。したがって

$$OC:CH = 1:1$$

である。

$$\text{(答)} \quad OC:CH = 1:1$$

(3)

四面体 OABC の体積を V 、四面体 ODEH の体積を V_1 、四面体 CFGH の体積を V_2 とする。このとき、四面体 OABC を平面 で分けたときに点 O を含む方の立体の体積は $V_1 - V_2$ と表せる。

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{OD}{OA} \cdot \frac{OE}{OB} \cdot \frac{OH}{OC} \cdot V \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{1} \cdot V \\ &= \frac{1}{3} V \\ V_2 &= \frac{CG}{CA} \cdot \frac{CF}{CB} \cdot \frac{CH}{CO} \cdot V \\ &= \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1} \cdot V \\ &= \frac{1}{15} V \end{aligned}$$

なので、

$$\begin{aligned} V_1 - V_2 &= \frac{1}{3} V - \frac{1}{15} V \\ &= \frac{4}{15} V \end{aligned}$$

となる。よって、四面体 OABC を平面 で分けたときの 2 つの立体の体積比は

$$\{V - (V_1 - V_2)\} : (V_1 - V_2) = \left(1 - \frac{4}{15} V\right) : \frac{4}{15} V = 11:4$$

である。

$$\text{(答)} \quad 11:4$$

4

(1)

曲線 $C: y = \log x$ について、 $y' = \frac{1}{x}$ なので、接線 l_p の方程式は

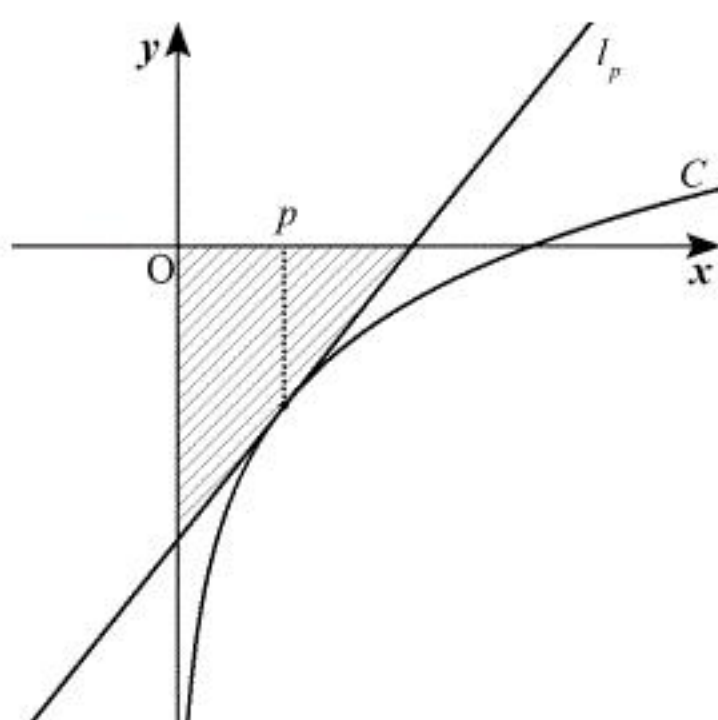
$$y - \log p = \frac{1}{p}(x - p)$$

$$\therefore y = \frac{1}{p}x - 1 + \log p$$

である。

(答) $y = \frac{1}{p}x - 1 + \log p$

(2)



接線 l_p の x 切片は $-p(1 - \log p)$ 、 y 切片は $-1 + \log p$ である。

接線 l_p 、 x 軸、 y 軸で囲まれた面積を $S(p)$ とすると、

$$\begin{aligned} S(p) &= \frac{1}{2} \cdot (1 - \log p) \cdot p(1 - \log p) \\ &= \frac{1}{2} p(1 - \log p)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dp} S(p) &= \frac{1}{2} (1 - \log p)^2 + p(1 - \log p) \left(-\frac{1}{p} \right) \\ &= \frac{1}{2} (1 - \log p)(1 - \log p - 2) \\ &= -\frac{1}{2} (1 - \log p)(1 + \log p) \end{aligned}$$

となる。よって増減表は次のようになる。

p	(0)	...	$\frac{1}{e}$	...	(1)
$\frac{d}{dp} S(p)$	/	+	0	-	/
$S(p)$	/	↗		↘	/

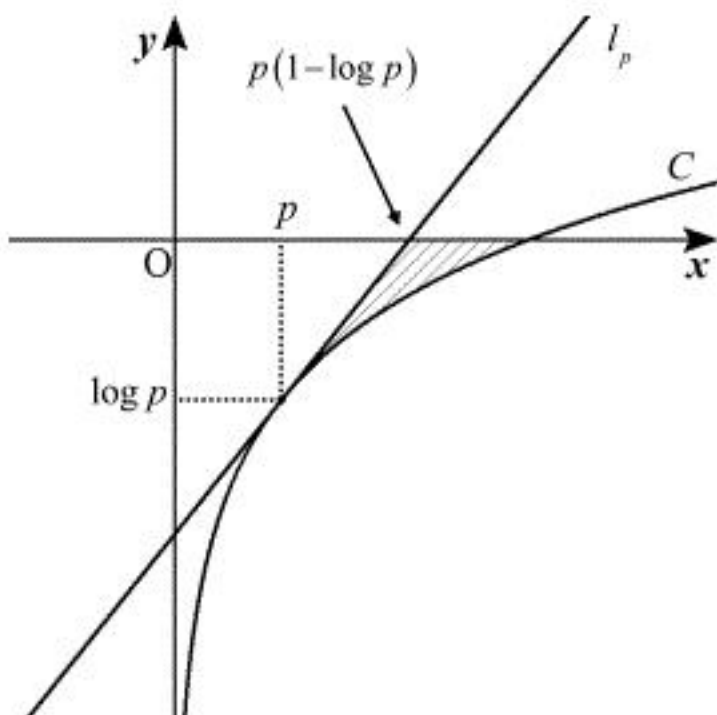
したがって面積の最大値は

$$S\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{e} \cdot \left(1 - \log \frac{1}{e}\right)^2 = \frac{2}{e}$$

である。

(答) $\frac{2}{e}$

(3)



求める回転体の体積を V とおくと、

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_p^1 (\log x)^2 dx - \frac{\pi}{3} \cdot (\log p)^2 \cdot \{p(1 - \log p) - p\} \\ &= \pi \left(\left[x(\log x)^2 \right]_p^1 - \int_p^1 2x \log x \cdot \frac{1}{x} dx \right) + \frac{\pi}{3} p(\log p)^3 \\ &= \pi \left\{ -p(\log p)^2 - 2[x \log x - x]_p^1 \right\} + \frac{\pi}{3} p(\log p)^3 \\ &= \pi \left\{ -p(\log p)^2 + 2 + 2(p \log p - p) \right\} + \frac{\pi}{3} p(\log p)^3 \\ &= \pi \left\{ \frac{1}{3} p(\log p)^3 - p(\log p)^2 + 2p \log p - 2p + 2 \right\} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\pi \left\{ \frac{1}{3} p(\log p)^3 - p(\log p)^2 + 2p \log p - 2p + 2 \right\}$

(1)

左辺を変形すると、

$$\begin{aligned}
 & A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E \\
 &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 - (a+d) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + (ad-bc) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} a^2+bc-(a+d)a+(ad-bc) & ab+bd-(a+d)b \\ ac+cd-(a+d)c & bc+d^2-(a+d)d+(ad-bc) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= O
 \end{aligned}$$

となり、与式は成り立つ。

(証明終)

(2)

$\alpha = a+d$, $\beta = ad-bc$ とおくと、仮定から α, β とも有理数である。(1)より、

$$\begin{aligned}
 A^2 - \alpha A + \beta E &= O \\
 \Leftrightarrow A^2 &= \alpha A - \beta E
 \end{aligned}$$

であるので、

$$\begin{aligned}
 A^3 &= A^2 A \\
 &= (\alpha A - \beta E) A \\
 &= \alpha A^2 - \beta A \\
 &= \alpha (\alpha A - \beta E) - \beta A \\
 &= (\alpha^2 - \beta) A - \alpha \beta E
 \end{aligned}$$

となる。ここで、 $A^3 = 5E$ と仮定すると、

$$\begin{aligned}
 (\alpha^2 - \beta) A - \alpha \beta E &= 5E \\
 \Leftrightarrow (\alpha^2 - \beta) A &= (5 + \alpha \beta) E \quad \cdots \cdots \textcircled{1}
 \end{aligned}$$

となる。

[1] $\alpha^2 - \beta = 0$ のとき

①の左辺は O になるので、右辺も O になる必要があり、そのためには

$$5 + \alpha \beta = 0$$

が必要である。いま、 $\alpha^2 - \beta = 0 \Leftrightarrow \beta = \alpha^2$ であるから、

$$\begin{aligned}
 5 + \alpha \cdot \alpha^2 &= 0 \\
 \therefore \alpha &= -\sqrt[3]{5}
 \end{aligned}$$

となり、これは α が有理数であることに矛盾する。

[2] $\alpha^2 - \beta \neq 0$ のとき

①より、

$$A = \frac{5 + \alpha \beta}{\alpha^2 - \beta} E$$

となる。このとき

$$\begin{aligned}
 A^3 &= \left(\frac{5 + \alpha \beta}{\alpha^2 - \beta} \right)^3 E = 5E \\
 \therefore \frac{5 + \alpha \beta}{\alpha^2 - \beta} &= \sqrt[3]{5}
 \end{aligned}$$

となり、左辺が有理数であるのに対し、右辺が無理数となるので、矛盾する。

[1], [2]より、 $A^3 = 5E$ は成り立たない。

(証明終)

(3)

仮定から、 α, β は実数である。いま、

$$\begin{aligned}
 A^6 &= (A^3)^2 \\
 &= \{(\alpha^2 - \beta) A - \alpha \beta E\}^2 \\
 &= (\alpha^2 - \beta)^2 A^2 - 2\alpha \beta (\alpha^2 - \beta) A + \alpha^2 \beta^2 E \\
 &= (\alpha^2 - \beta)^2 (\alpha A - \beta E) - 2\alpha \beta (\alpha^2 - \beta) A + \alpha^2 \beta^2 E \\
 &= \alpha (\alpha^2 - \beta) (\alpha^2 - 3\beta) A + \left\{ \alpha^2 \beta^2 - \beta (\alpha^2 - \beta)^2 \right\} E
 \end{aligned}$$

である。これが $-E$ に等しいから、

$$\begin{aligned}
 \alpha (\alpha^2 - \beta) (\alpha^2 - 3\beta) A + \left\{ \alpha^2 \beta^2 - \beta (\alpha^2 - \beta)^2 \right\} E &= -E \\
 \therefore \alpha (\alpha^2 - \beta) (\alpha^2 - 3\beta) A &= \left\{ -\alpha^2 \beta^2 + \beta (\alpha^2 - \beta)^2 - 1 \right\} E \quad \cdots \cdots \textcircled{2}
 \end{aligned}$$

となる。

[1] $\alpha (\alpha^2 - \beta) (\alpha^2 - 3\beta) = 0$ のとき

②の左辺は O になるので、右辺も O になる必要があり、そのためには

$$-\alpha^2 \beta^2 + \beta (\alpha^2 - \beta)^2 - 1 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

が必要である。

$\alpha = 0$ ならば、③より

$$\begin{aligned}
 \beta^3 &= 1 \\
 \therefore \beta &= 1
 \end{aligned}$$

となる。

$\alpha^2 - \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = \pm \sqrt{\beta}$ ならば、③より

$$\begin{aligned}
 \beta^3 &= -1 \\
 \therefore \beta &= -1
 \end{aligned}$$

となるが、これは α が実数であることに反する。

$\alpha^2 - 3\beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = \pm \sqrt{3\beta}$ ならば、③より

$$\begin{aligned}
 \beta^3 &= 1 \\
 \therefore \beta &= 1
 \end{aligned}$$

となる。このとき $\alpha = \pm \sqrt{3}$ である。

[2] $\alpha (\alpha^2 - \beta) (\alpha^2 - 3\beta) \neq 0$ のとき

②より、

$$A = \frac{-\alpha^2 \beta^2 + \beta (\alpha^2 - \beta)^2 - 1}{\alpha (\alpha^2 - \beta) (\alpha^2 - 3\beta)} E$$

となる。このとき

$$A^6 = \left(\frac{-\alpha^2 \beta^2 + \beta (\alpha^2 - \beta)^2 - 1}{\alpha (\alpha^2 - \beta) (\alpha^2 - 3\beta)} \right)^6 E = -E$$

となり、これは $\frac{-\alpha^2 \beta^2 + \beta (\alpha^2 - \beta)^2 - 1}{\alpha (\alpha^2 - \beta) (\alpha^2 - 3\beta)}$ が実数であることに矛盾するので、不適である。

以上[1], [2]より、考えうる α, β の組は $(\alpha, \beta) = (0, 1), (\pm \sqrt{3}, 1)$ である。

$(\alpha, \beta) = (0, 1)$ の例として

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

があげられる。

$(\alpha, \beta) = (\pm \sqrt{3}, 1)$ の例として

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \pm \sqrt{3} \end{pmatrix} \quad (\text{複号同順})$$

があげられる。

(答) 考えうる組み合わせ $(a+d, ad-bc) = (0, 1), (\pm \sqrt{3}, 1)$

$$(a+d, ad-bc) = (0, 1) \text{ の例 } \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(a+d, ad-bc) = (\pm \sqrt{3}, 1) \text{ の例 } \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \pm \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

(ただし、複号同順)