

x 軸方向に +1 のみ移動する移動を X

y 軸方向に +1 のみ移動する移動を Y

直線 $y = -x$ に平行な道を x 軸方向に -1, y 軸方向に +1 移動する移動を S

直線 $y = -x$ に平行な道を x 軸方向に +1, y 軸方向に -1 移動する移動を T

とする。

(1)

移動 S, T を含むと最短経路ではなくなるので, 最短経路で行く場合, X を 4 回, Y を 4 回のみ行うことになる。したがって, 求める場合の数は

$$\frac{8!}{4!4!} = 70 \text{ (通り)}$$

となる。

(答) 70 通り

(2)

点 B を通り最短経路で行く場合, $(2, 2)$ へ移動したあと, Y を 1 回行い, 最短経路で A へ向かえば良いのでその場合の数は

$$\frac{4!}{2!2!} \times \frac{3!}{1!2!} = 18 \text{ (通り)}$$

となる。よって求める場合の数は

$$70 - 18 = 52 \text{ (通り)}$$

となる。

(答) 52 通り

(3)

点 C を通り道のりが $8 + \sqrt{2}$ となるとき, 点 C まで Y を 1 回, S を 1 回行い, 点 C から点 A まで X を 5 回, Y を 2 回行うときであるので求める場合の数は

$$\frac{2!}{1!1!} \times \frac{7!}{2!5!} = 42 \text{ (通り)}$$

となる。

(答) 42 通り

(4)

道のりが $8 + \sqrt{2}$ となるのは, 次の 2 つの場合がある。

[1] X を 5 回, Y を 3 回, S を 1 回行うとき

道の図より, X を 5 回, Y を 3 回行う間の, どの地点においても, S を行う(左上に進む)ことができるから, 求める場合の数は,

$$\frac{9!}{5!3!1!} = 504 \text{ (通り)}$$

となる。

[2] X を 3 回, Y を 5 回, T を 1 回行うとき

道は $y = x$ に関して対称であるから, x 軸方向と y 軸方向を入れ替えて考えることにより, 同様に 504 通りと求まる。

以上, [1], [2] より, 求める場合の数は

$$504 \times 2 = 1008 \text{ (通り)}$$

となる。

(答) 1008 通り

(5)

(4) の道順のうち, 条件を満たさない道順を数える。(4) と同様に, 対称性から, X を 5 回, Y を 3 回, S を 1 回行うときを考えて, 2 倍すればよい。どこで, S を行うかに着目して場合分けをする。

[1] $(0, 0)$ または $(5, 3)$ から, S を行うとき

$(-1, 1)$ から A, あるいは, $(0, 0)$ から $(5, 3)$ に最短経路で行く道順を考えればよいので,

$$\frac{8!}{5!3!} \times 2 = 112 \text{ (通り)}$$

となる。

[2] $(0, 1)$ または $(5, 2)$ から S を行うとき

$(-1, 2)$ から A, あるいは, $(0, 0)$ から $(5, 2)$ に最短経路で行く道順を考えればよいので,

$$\frac{7!}{5!2!} \times 2 = 42 \text{ (通り)}$$

となる。

[3] $(0, 2)$ または $(5, 1)$ から S を行うとき

$(-1, 3)$ から A, あるいは, $(0, 0)$ から $(5, 1)$ に最短経路で行く道順を考えればよいので,

$$\frac{6!}{5!1!} \times 2 = 12 \text{ (通り)}$$

となる。

[4] $(0, 3)$ または $(5, 0)$ から S を行うとき

$(-1, 4)$ から A, あるいは, $(0, 0)$ から $(5, 0)$ に最短経路で行く道順を考えればよいので,

$$1 \times 2 = 2 \text{ (通り)}$$

となる。

以上, [1] から [4] より, 求める場合の数は,

$$(504 - 112 - 42 - 12 - 2) \times 2 = 672 \text{ (通り)}$$

となる。

(答) 672 通り

(1)

$$y \geq |3x-2|$$

は $x \geq \frac{2}{3}$ において

$$y \geq 3x-2$$

となり $x \leq \frac{2}{3}$ において

$$y \geq -(3x-2)$$

となる。直線 $x-4y+8=0$ と直線 $y=3x-2$ の交点の x 座標は

$$x-4(3x-2)+8=0 \quad \therefore x=\frac{16}{11}$$

となり、 y 座標は

$$y=3 \cdot \frac{16}{11}-2=\frac{26}{11}$$

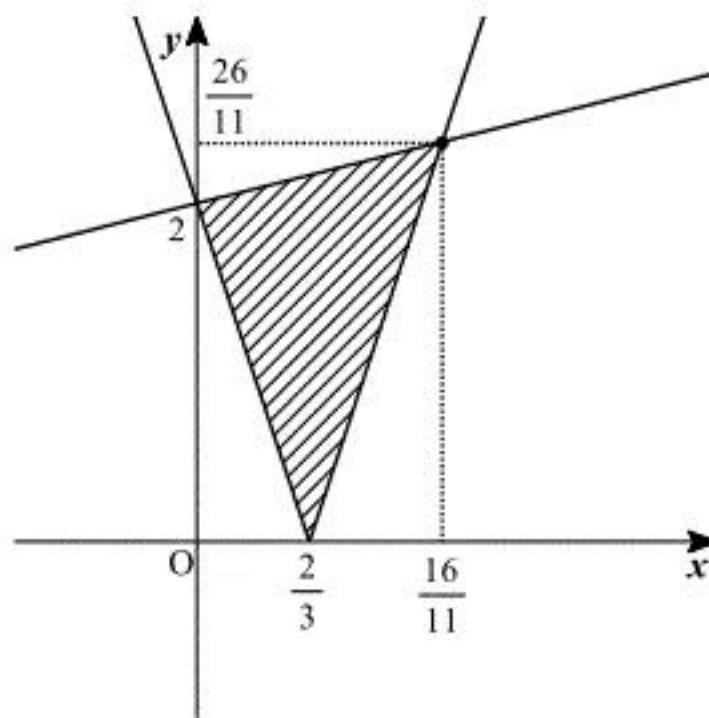
となる。直線 $x-4y+8=0$ と直線 $y=-(3x-2)$ の交点の x 座標は

$$x+4(3x-2)+8=0 \\ \therefore x=0$$

となり、 y 座標は

$$y=-(-2) \\ =2$$

となる。よって求める領域は下図の斜線部分となる。(境界線も含む。)



(答) 前図

(2)

$$x^2+2x+y^2=k$$

とおくと

$$(x+1)^2+y^2=k+1 \\ \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2+y^2}=\sqrt{k+1}$$

となる。よって x^2+2x+y^2 が最小となるとき点 (x, y) と点 $(-1, 0)$ の距離も最小となる。前図から点 (x, y) は直線 $y=-(3x-2)$ 上に位置することがわかる。点 $(-1, 0)$ を通り直線 $y=-(3x-2)$ に垂直な直線の方程式は

$$y=\frac{1}{3}(x+1)$$

となる。この直線と直線 $y=-(3x-2)$ の交点の x 座標は

$$\frac{1}{3}(x+1)=-(3x-2) \Leftrightarrow 10x=5 \\ \therefore x=\frac{1}{2}$$

となり、 y 座標は

$$y=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}+1\right)=\frac{1}{2}$$

となる。このとき、 k は最小となり、その値は

$$k=\left(\frac{1}{2}\right)^2+2 \cdot \frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{2}$$

となる。

(答) 最小値 $\frac{3}{2}$, それを与える $(x, y)=\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

3

平面上の点 X に対し、 $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{OX}$ のように表す。

(1)

$$|\overrightarrow{a}| = |\overrightarrow{b}| = 1, \angle AOB = \frac{2}{3}\pi \text{ だから,}$$

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 1 \cdot 1 \cdot \cos \frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2}$$

となる。

$$\text{(答) } \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -\frac{1}{2}$$

(2)

正三角形 ABC の重心が O であるから、

$$\frac{\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}}{3} = \overrightarrow{0} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\therefore \overrightarrow{c} = -\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$$

となる。

$$\text{(答) } \overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$$

(3)

①に注意すると、

$$\begin{aligned} AP^2 + BP^2 + CP^2 &= |\overrightarrow{p} - \overrightarrow{a}|^2 + |\overrightarrow{p} - \overrightarrow{b}|^2 + |\overrightarrow{p} - \overrightarrow{c}|^2 \\ &= 3|\overrightarrow{p}|^2 - 2\overrightarrow{p} \cdot (\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) + |\overrightarrow{a}|^2 + |\overrightarrow{b}|^2 + |\overrightarrow{c}|^2 \\ &= 3|\overrightarrow{p}|^2 + 3 \\ &\geq 3 \end{aligned}$$

が成り立つ。

(証明終)

また、等号が成り立つのは、 $|\overrightarrow{p}| = 0$ 、すなわち、点 P が原点 O の位置にあるときである。

(答) 等号成立: $P = O$ のとき

(4)

$\angle AOQ = \theta$ とおく。 $\angle BOQ = \frac{2}{3}\pi + \theta$, $\angle COQ = \frac{2}{3}\pi - \theta$ として一般性を失わない。このとき、

$$\begin{aligned} &(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{q})^2 + (\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{q})^2 + (\overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{q})^2 \\ &= \cos^2 \theta + \cos^2 \left(\frac{2}{3}\pi + \theta \right) + \cos^2 \left(\frac{2}{3}\pi - \theta \right) \\ &= \cos^2 \theta + \left(-\frac{1}{2}\cos \theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin \theta \right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\cos \theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin \theta \right)^2 \\ &= \cos^2 \theta + 2 \left(\frac{1}{4}\cos^2 \theta + \frac{3}{4}\sin^2 \theta \right) \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

となる。

(証明終)

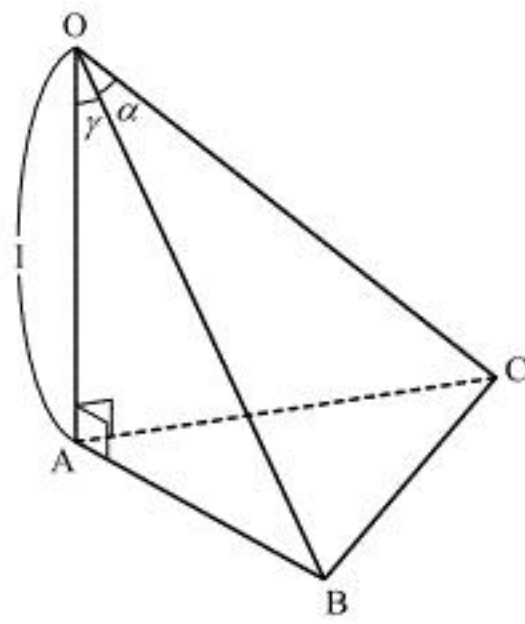
(5)

①と(4)の結果を用いると、

$$\begin{aligned} &AQ^4 + BQ^4 + CQ^4 \\ &= |\overrightarrow{q} - \overrightarrow{a}|^4 + |\overrightarrow{q} - \overrightarrow{b}|^4 + |\overrightarrow{q} - \overrightarrow{c}|^4 \\ &= \left(|\overrightarrow{q}|^2 - 2\overrightarrow{q} \cdot \overrightarrow{a} + |\overrightarrow{a}|^2 \right)^2 + \left(|\overrightarrow{q}|^2 - 2\overrightarrow{q} \cdot \overrightarrow{b} + |\overrightarrow{b}|^2 \right)^2 + \left(|\overrightarrow{q}|^2 - 2\overrightarrow{q} \cdot \overrightarrow{c} + |\overrightarrow{c}|^2 \right)^2 \\ &= 4 \left(1 - \overrightarrow{q} \cdot \overrightarrow{a} \right)^2 + 4 \left(1 - \overrightarrow{q} \cdot \overrightarrow{b} \right)^2 + 4 \left(1 - \overrightarrow{q} \cdot \overrightarrow{c} \right)^2 \\ &= 4 \left\{ 3 - 2\overrightarrow{q} \cdot (\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) + (\overrightarrow{q} \cdot \overrightarrow{a})^2 + (\overrightarrow{q} \cdot \overrightarrow{b})^2 + (\overrightarrow{q} \cdot \overrightarrow{c})^2 \right\} \\ &= 4 \left(3 + \frac{3}{2} \right) \\ &= 18 \end{aligned}$$

となる。

(答) 18



(1)

図から

$$OB = \frac{1}{\cos \gamma} = \sqrt{3}$$

$$OC = \frac{1}{\cos \beta} = \sqrt{3}$$

となる。ここで三角形 OBC について余弦定理から

$$BC^2 = OB^2 + OC^2 - 2OB \cdot OC \cos \alpha$$

$$\Leftrightarrow BC^2 = 3 + 3 - \frac{3}{2}$$

$$\therefore BC = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

(2)

 β, γ は鋭角であるので

$$\sin \beta = \sqrt{\frac{2}{3}}, \sin \gamma = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

となる。よって

$$AB = AC = \sqrt{2}$$

となる。よって、三角形 ABC について余弦定理から

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 - \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2}{2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} \\ &= -\frac{1}{8} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad -\frac{1}{8}$$

(3)

線分 OA と平面 ABC は垂直となるので

$$\angle OAP = 90^\circ$$

となり、三平方の定理から

$$OP^2 = OA^2 + AP^2 = AP^2 + 1$$

となる。 $AP = R$ とおくと、正弦定理から

$$\frac{BC}{\sin \theta} = 2 \cdot R$$

$$\Leftrightarrow R = \frac{\frac{3\sqrt{2}}{2}}{2\sqrt{1 - \cos^2 \theta}}$$

$$\therefore R = \frac{2\sqrt{14}}{7}$$

となる。よって

$$OP^2 = 1 + \left(\frac{2\sqrt{14}}{7}\right)^2 = \frac{15}{7}$$

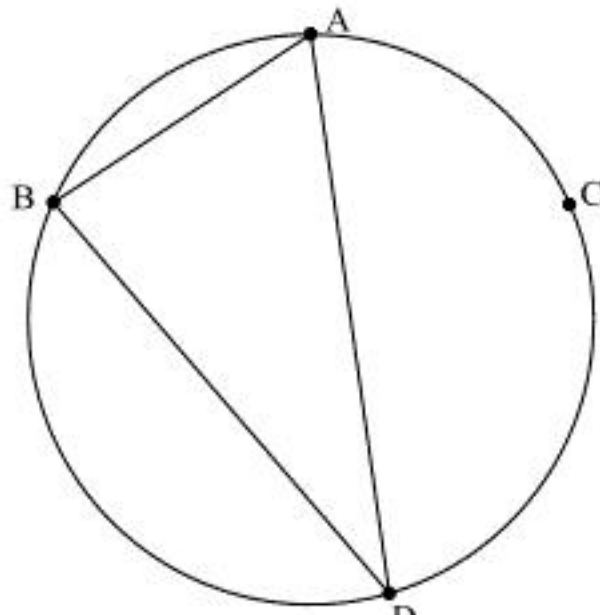
となり

$$OP = \frac{\sqrt{105}}{7}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{\sqrt{105}}{7}$$

(4)

最大値を求めるので、辺 AB に対して、円の中心を含む側の優弧に点 D がある場合を考えればよい。 $\angle ADB = \omega$ とおくと三角形 ABD について正弦定理から

$$\frac{AB}{\sin \omega} = 2 \cdot AP$$

$$\Leftrightarrow \sin \omega = \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot \frac{2\sqrt{14}}{7}}$$

$$\therefore \sin \omega = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

となる。 $\angle ADB$ は鋭角であるので

$$\cos \omega = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2} = \frac{3}{4}$$

となる。次に $\angle DAB = \varphi$, $\angle DBA = \psi$ とおく。このとき

$$\varphi + \psi + \omega = \pi$$

$$\Leftrightarrow \varphi + \psi = \pi - \omega$$

となり、 $\varphi + \psi$ の値は定数となる。よって三角形 ABD について正弦定理から

$$\frac{y}{\sin \varphi} = \frac{x}{\sin \psi} = 2 \cdot AP$$

となり、これから

$$x + y = 2AP \sin \varphi + 2AP \sin \psi$$

となり

$$2AP \sin \frac{\varphi + \psi}{2}$$

は定数となるので $x + y$ が最大となるのは $\cos \frac{\varphi - \psi}{2}$ が最大となるときである。 $0 < \varphi < \pi$, $0 < \psi < \pi$ であることに注意すると

$$\frac{\varphi - \psi}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \varphi = \psi$$

において最大となる。よってこのとき

$$x = y$$

となり、三角形 ADB について余弦定理より

$$AB^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos \omega$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - \frac{3}{2}x^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 4$$

$$\therefore x = 2 (\because x > 0)$$

となる。したがって、 $x + y$ の最大値は

$$2 + 2 = 4$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \text{最大値 } 4 \text{ そのときの } (x, y) = (2, 2)$$

(1)

接点の座標は $(p, p^2 + 4p)$ となるので

$$y' = 2x + 4$$

から l の方程式は

$$y = (2p + 4)(x - p) + p^2 + 4p$$

$$\therefore y = (2p + 4)x - p^2$$

となる。

$$(\text{答}) \quad y = (2p + 4)x - p^2$$

(2)

接点の座標を $(t, t^2 + 4t)$ としたとき、この点における接線の方程式は

$$y = (2t + 4)x - t^2$$

となる。この直線が $(0, -p^2)$ を通るとき

$$-p^2 = -t^2$$

$$\therefore t = -p \quad (\because t \neq p)$$

となる。よって求める直線の方程式は

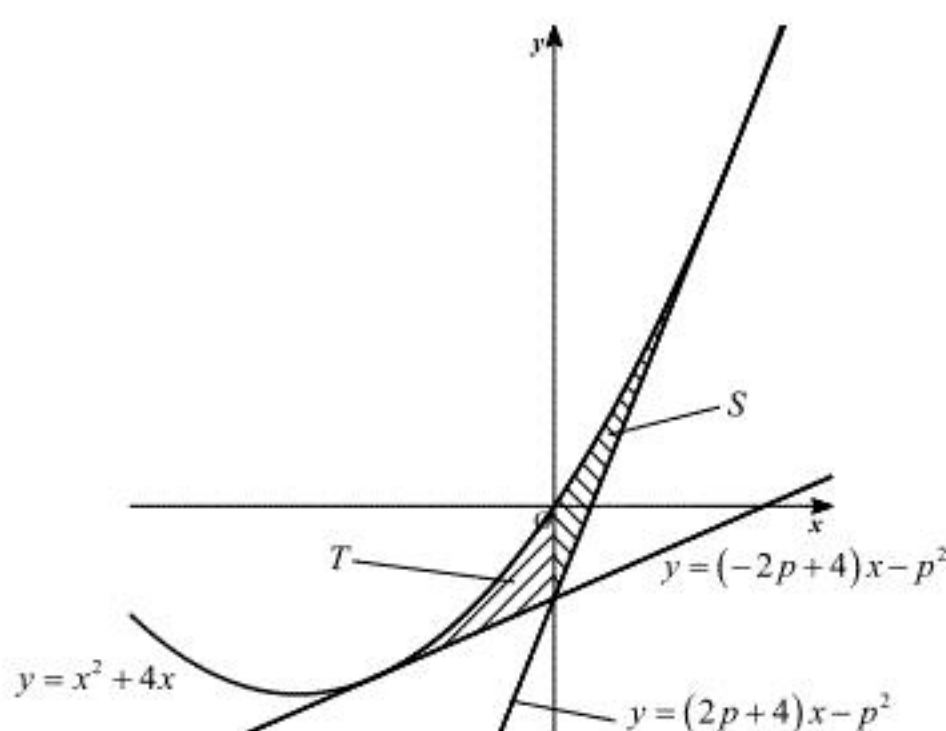
$$y = (-2p + 4)x - p^2$$

となる。

$$(\text{答}) \quad y = (-2p + 4)x - p^2$$

(3)

$$y = (-2p + 4)x - p^2$$



(S, T) はそれぞれ上図の斜線部分となるのでそれぞれ

$$\begin{aligned} S &= \int_0^p \left\{ (x^2 + 4x) - (2p + 4)x + p^2 \right\} dx \\ &= \int_0^p (x - p)^2 dx \\ &= \frac{1}{3} \left[(x - p)^3 \right]_0^p \\ &= \frac{1}{3} p^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T &= \int_{-p}^0 \left\{ (x^2 + 4x) - (-2p + 4)x + p^2 \right\} dx \\ &= \frac{1}{3} \left[(x + p)^3 \right]_{-p}^0 \\ &= \frac{1}{3} p^3 \end{aligned}$$

となる。よって

$$\frac{T}{S} = \frac{\frac{1}{3} p^3}{\frac{1}{3} p^3} = 1$$

となる。よって題意は示された。

(証明終)