

(1)

$$y \geq |3x-2|$$

$$\Leftrightarrow y \geq 3x-2 \geq -y$$

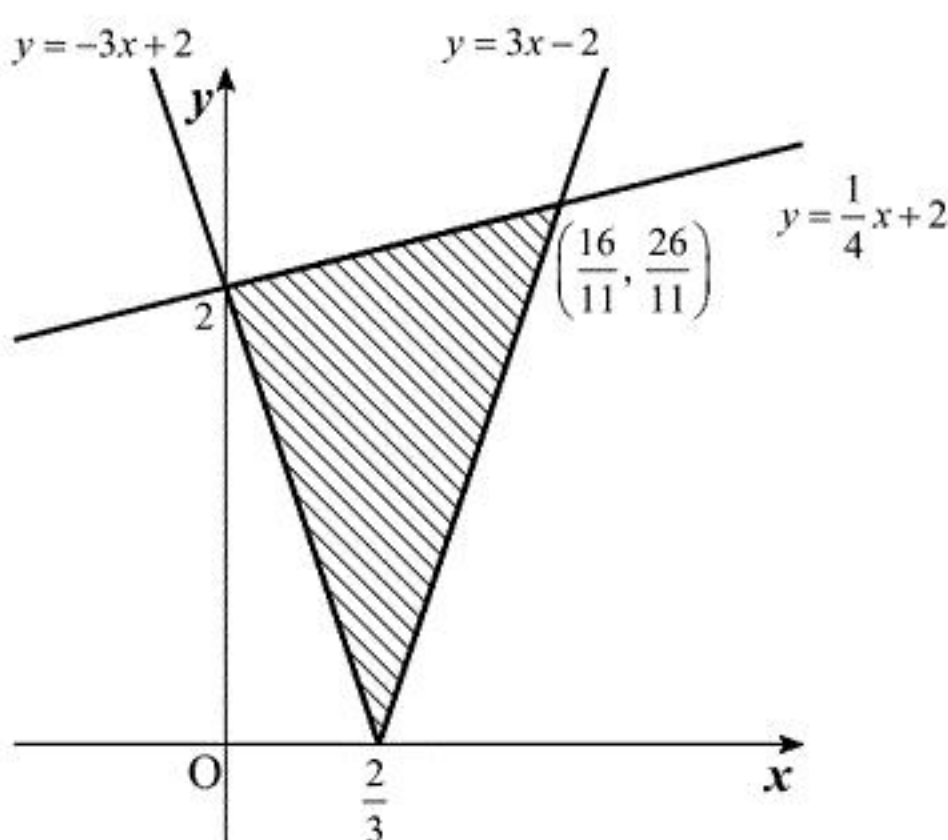
$$\Leftrightarrow y \geq 3x-2 \text{ かつ } y \geq -3x+2$$

である。

$$x-4y+8 \geq 0$$

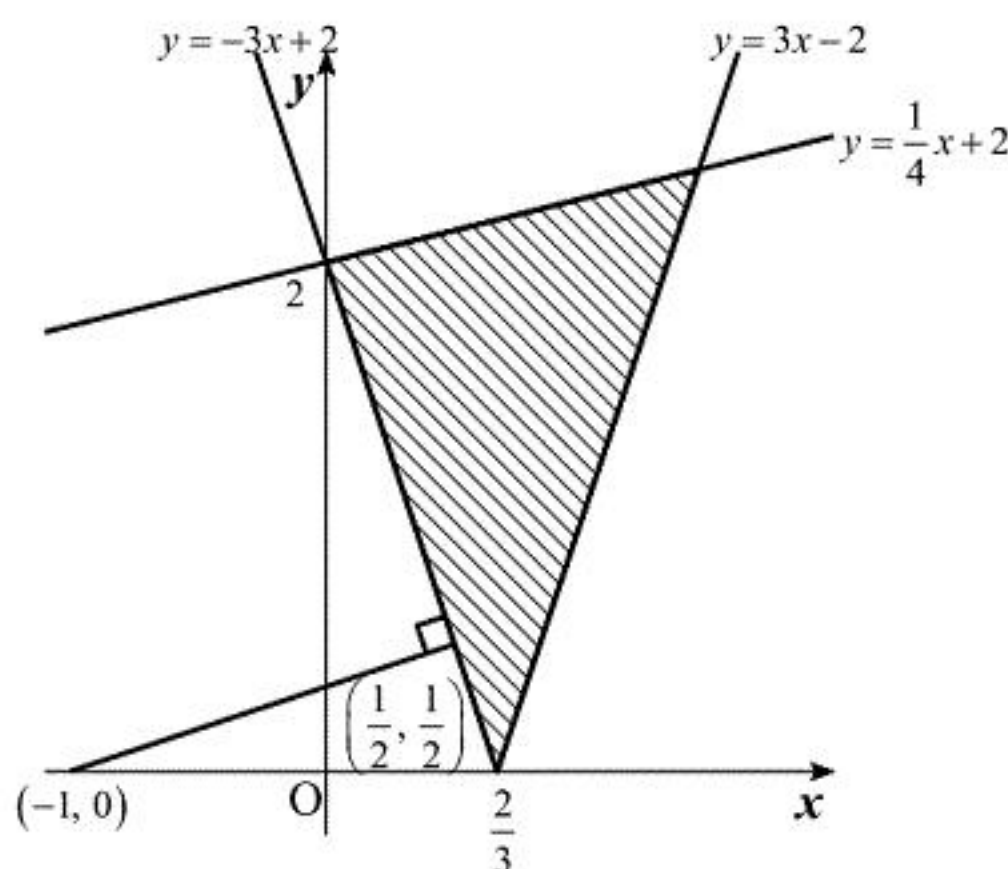
$$\Leftrightarrow y \leq \frac{1}{4}x+2$$

とともに図示すると領域 D は下図の斜線部になる。ただし、境界を含む。



(答) 前図、ただし境界を含む

(2)



実数 k を用いて、 $x^2 + 2x + y^2 = k$ とおくと、

$$x^2 + 2x + y^2 = k$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 + y^2 = k+1$$

である。この左辺は (x, y) と $(-1, 0)$ との距離が $\sqrt{k+1}$ であることを表し、この距離が最小となるとき、 k が最小となる。 $(-1, 0)$ を通り $y = -3x + 2$ と直交する直線と直線 $y = -3x + 2$ の交点が領域 D 内にあれば、その点が最小値をとるとき (x, y) である。 $(-1, 0)$ を通り $y = -3x + 2$ と直交する直線の方程式は、

$$y = \frac{1}{3}(x+1) + 0$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$$

である。これと $y = -3x + 2$ を連立して、 y を消去すると、

$$\frac{1}{3}x + \frac{1}{3} = -3x + 2$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

となる。よって、 $y = -3 \cdot \frac{1}{2} + 2 = \frac{1}{2}$ であるから交点の座標は $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ である。ここで、交点の x 座標について、

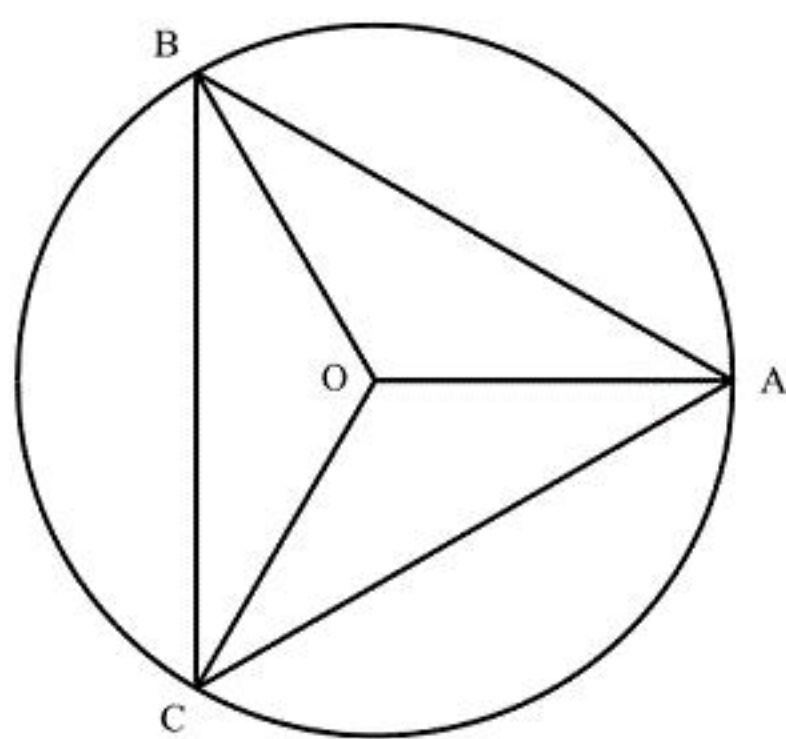
$$0 \leq \frac{1}{2} \leq \frac{2}{3}$$

が成り立つから、この交点は領域 D に含まれる。ゆえに、求める最小値は、 $(x, y) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ のとき、

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{2}$$

である。

(答) $(x, y) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ のとき、 $\frac{3}{2}$



(1)

△ABCは正三角形より、 $\angle AOB = \frac{2\pi}{3}$ である。よって、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} &= |\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OB}| \cos \angle AOB \\ &= 1 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

である。

(答) $-\frac{1}{2}$

(2)

座標平面上で、 $A(1, 0)$, $B\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $C\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ とおいても一般性を失わない。すると、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \\ &= -\overrightarrow{OC}\end{aligned}$$

となる。よって、 $\overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$ である。

(答) $\overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$

(3)

(2)より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \\ &= \vec{0}\end{aligned}$$

である。これを用いると、

$$\begin{aligned}AP^2 + BP^2 + CP^2 &= |\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OB}|^2 + |\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OC}|^2 \\ &= |\overrightarrow{OP}|^2 - 2\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OA} + |\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OP}|^2 - 2\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OB} + |\overrightarrow{OB}|^2 + |\overrightarrow{OP}|^2 - 2\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OC} + |\overrightarrow{OC}|^2 \\ &= 3|\overrightarrow{OP}|^2 - 2\overrightarrow{OP} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) + |\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2 + |\overrightarrow{OC}|^2 \\ &= 3|\overrightarrow{OP}|^2 - 2\overrightarrow{OP} \cdot \vec{0} + 1 + 1 + 1 \\ &= 3|\overrightarrow{OP}|^2 + 3 \\ &\geq 3\end{aligned}$$

である。等号が成立するのは

$$|\overrightarrow{OP}| = 0$$

のとき、すなわち、PがOに一致するときである。

(証明終)

(答) 等号成立はPがOに一致するとき

(4)

点Qは円S上にあるから、(2)で定めた座標を用いると、 $Q(\cos \theta, \sin \theta)$ ($0 \leq \theta < 2\pi$)とおける。

よって、

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OQ})^2 + (\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OQ})^2 + (\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OQ})^2 &= \cos^2 \theta + \left(-\frac{1}{2} \cos \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} \cos \theta - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta\right)^2 \\ &= \frac{3}{2} \cos^2 \theta + \frac{3}{2} \sin^2 \theta \\ &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

となる。

(証明終)

(5)

OQ=1より、

$$\begin{aligned}AQ^2 &= |\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OA}|^2 \\ &= |\overrightarrow{OQ}|^2 - 2\overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OA} + |\overrightarrow{OA}|^2 \\ &= 1 - 2\overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OA} + 1 \\ &= 2 - 2\overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OA}\end{aligned}$$

である。よって、

$$\begin{aligned}AQ^4 &= (2 - 2\overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OA})^2 \\ &= 4 \left\{ 1 - 2\overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OA} + (\overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OA})^2 \right\}\end{aligned}$$

である。同様に考えて、

$$\begin{aligned}BQ^4 &= 4 \left\{ 1 - 2\overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OB} + (\overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OB})^2 \right\} \\ CQ^4 &= 4 \left\{ 1 - 2\overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OC} + (\overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OC})^2 \right\}\end{aligned}$$

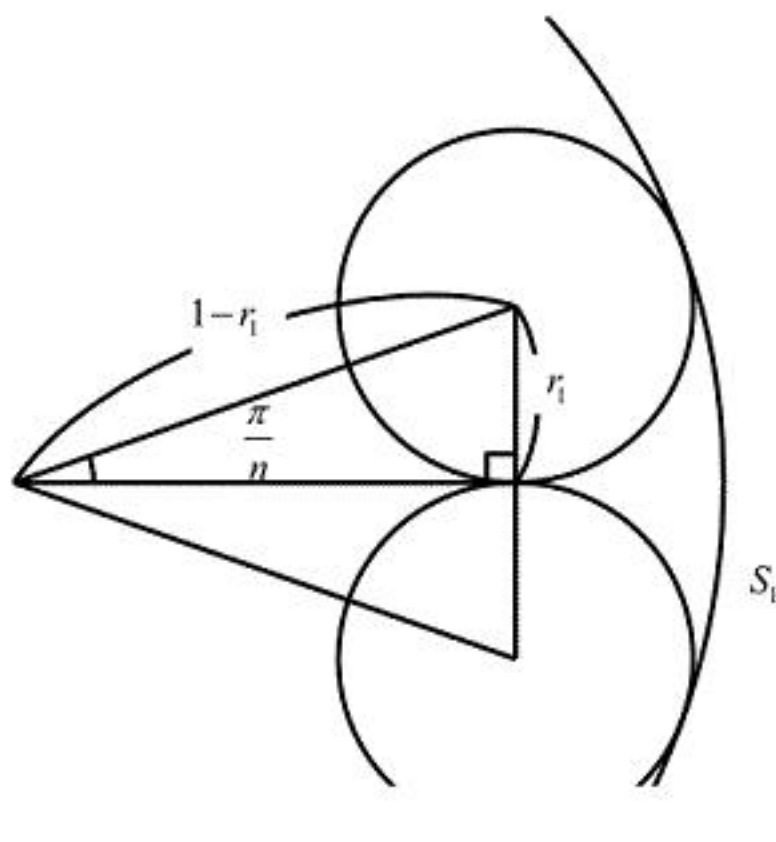
となるから、

$$\begin{aligned}AQ^4 + BQ^4 + CQ^4 &= 4 \left\{ 3 - 2\overrightarrow{OQ} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OA})^2 + (\overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OB})^2 + (\overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OC})^2 \right\} \\ &= 4 \left(3 - 2\overrightarrow{OQ} \cdot \vec{0} + \frac{3}{2} \right) (\because (4)) \\ &= 18\end{aligned}$$

となる。

(答) 18

(1)



$\sin \frac{\pi}{n} = u$ とおく。このとき、上図より、

$$\begin{aligned} (1-r_1)\sin \frac{\pi}{n} &= r_1 \\ \Leftrightarrow (1-r_1)u &= r_1 \\ \Leftrightarrow (1+u)r_1 &= u \\ \Leftrightarrow r_1 &= \frac{u}{1+u} \\ \Leftrightarrow r_1 &= \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{1+\sin \frac{\pi}{n}} \end{aligned}$$

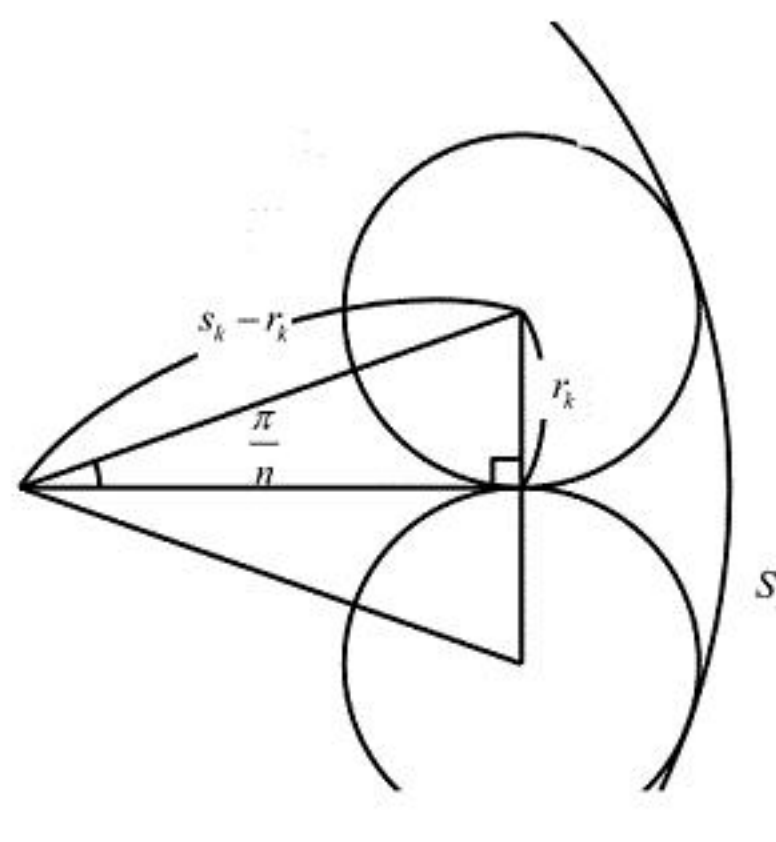
である。また、 $s_2 = 1 - 2r_1$ であるから、

$$\begin{aligned} s_2 &= 1 - 2 \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{1+\sin \frac{\pi}{n}} \\ &= \frac{1-\sin \frac{\pi}{n}}{1+\sin \frac{\pi}{n}} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad r_1 = \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{1+\sin \frac{\pi}{n}}, s_2 = \frac{1-\sin \frac{\pi}{n}}{1+\sin \frac{\pi}{n}}$$

(2)



(1)と同様に考える。上図より、

$$\begin{aligned} (s_k - r_k)\sin \frac{\pi}{n} &= r_k \\ \Leftrightarrow (s_k - r_k)u &= r_k \\ \Leftrightarrow (1+u)r_k &= s_k u \\ \Leftrightarrow r_k &= \frac{u}{1+u} s_k \\ \Leftrightarrow r_k &= \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{1+\sin \frac{\pi}{n}} s_k \end{aligned}$$

である。また、 $s_{k+1} = s_k - 2r_k$ であるから、

$$\begin{aligned} s_{k+1} &= s_k - 2r_k \\ \Leftrightarrow \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{1+\sin \frac{\pi}{n}} s_{k+1} &= \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{1+\sin \frac{\pi}{n}} s_k - 2 \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{1+\sin \frac{\pi}{n}} r_k \\ \Leftrightarrow r_{k+1} &= r_k - 2 \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{1+\sin \frac{\pi}{n}} r_k \\ \therefore r_{k+1} &= \frac{1-u}{1+u} r_k \end{aligned}$$

となる。これは、数列 $\{r_k\}$ が初項 $r_1 = \frac{u}{1+u}$ 、公比 $\frac{1-u}{1+u}$ の等比数列であることを表す。ゆえに、

$$r_k = \left(\frac{1-u}{1+u} \right)^{k-1} \frac{u}{1+u}$$

である。よって、

$$\begin{aligned} T_k(n) &= r_k^2 \pi \\ &= \pi \left(\frac{u}{1+u} \right)^2 \left(\frac{1-u}{1+u} \right)^{2(k-1)} \\ &= \pi \left(\frac{\sin \frac{\pi}{n}}{1+\sin \frac{\pi}{n}} \right)^2 \left(\frac{1-\sin \frac{\pi}{n}}{1+\sin \frac{\pi}{n}} \right)^{2(k-1)} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad T_k(n) = \pi \left(\frac{\sin \frac{\pi}{n}}{1+\sin \frac{\pi}{n}} \right)^2 \left(\frac{1-\sin \frac{\pi}{n}}{1+\sin \frac{\pi}{n}} \right)^{2(k-1)}$$

(3)

$0 < \sin \frac{\pi}{n} < 1$, $u = \sin \frac{\pi}{n}$ より, $0 < \left(\frac{1-u}{1+u} \right)^2 < 1$ である。これを用いて、

$$\begin{aligned} U(n) &= n \sum_{k=1}^{\infty} T_k(n) \\ &= n\pi \left(\frac{u}{1+u} \right)^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{1-u}{1+u} \right)^2 \right\}^{k-1} \\ &= n\pi \left(\frac{u}{1+u} \right)^2 \frac{1}{1 - \left(\frac{1-u}{1+u} \right)^2} \\ &= n\pi \left(\frac{u}{1+u} \right)^2 \frac{(1+u)^2}{(1+u)^2 - (1-u)^2} \\ &= n\pi \left(\frac{u}{1+u} \right)^2 \frac{(1+u)^2}{4u} \\ &= n\pi \cdot \frac{u}{4} \\ &= \frac{n\pi}{4} \sin \frac{\pi}{n} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad U(n) = \frac{n\pi}{4} \sin \frac{\pi}{n}$$

(4)

$$U(n) = \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} \cdot \frac{\pi^2}{4}$$

と変形できる。ここで、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n} = 0$ であるから、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} = 1$$

である。よって、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U(n) = \frac{\pi^2}{4}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{\pi^2}{4}$$

(1)

A は $(2, 1)$ を $(5, 2)$ に移す行列であるから,

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2a+b \\ 2c+d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+b=5 \\ 2c+d=2 \end{cases}\end{aligned}$$

となる。よって、 A が逆行列をもつための必要十分条件は,

$$\begin{aligned}\det A &\neq 0 \\ \Leftrightarrow ad-bc &\neq 0 \\ \Leftrightarrow a(2-2c)-(5-2a)c &\neq 0 \\ \Leftrightarrow 2a-5c &\neq 0\end{aligned}$$

となる。

(答) $2a-5c \neq 0$

(2)

$$\begin{aligned}A^2 &= \begin{pmatrix} a & 5-2a \\ c & 2-2c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 5-2a \\ c & 2-2c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2+(5-2a)c & (5-2a)(a+2-2c) \\ (a+2-2c)c & c(5-2a)+(2-2c)^2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

である。これが $\begin{pmatrix} \frac{25}{4} & 0 \\ \frac{5}{2} & 0 \end{pmatrix}$ に等しいため、 $(1, 2)$ 成分を比較して,

$$\begin{aligned}(5-2a)(a+2-2c) &= 0 \\ \Leftrightarrow 5-2a=0 \text{ または } a+2-2c &= 0\end{aligned}$$

となることが必要である。

[1] $5-2a=0$ のとき

このとき、 $a=\frac{5}{2}$ である。よって、 A^2 の $(2, 2)$ 成分の比較により

$$\begin{aligned}c(5-2a)+(2-2c)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (2-2c)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow c &= 1\end{aligned}$$

である。このとき、確かに

$$(1, 1) \text{ 成分: } a^2+(5-2a)c = \frac{25}{4}$$

$$(2, 1) \text{ 成分: } (a+2-2c)c = \frac{5}{2}$$

を満たす。

[2] $a+2-2c=0$ のとき

このとき、 $(2, 1)$ 成分について,

$$(a+2-2c)c = 0 \neq \frac{5}{2}$$

となり、不適である。

以上, [1], [2] より、題意を満たす行列 A は

$$\begin{aligned}A &= \begin{pmatrix} a & 5-2a \\ c & 2-2c \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow A &= \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

である。

(答) $A = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(3)

まず、数学的帰納法により $A^n = \begin{pmatrix} \left(\frac{5}{2}\right)^n & 0 \\ \left(\frac{5}{2}\right)^{n-1} & 0 \end{pmatrix} \cdots \textcircled{1}$ であることを示す。

[1] $n=1$ のとき,

$$\begin{aligned}A &= \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow A^1 &= \begin{pmatrix} \left(\frac{5}{2}\right)^1 & 0 \\ \left(\frac{5}{2}\right)^0 & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

となり①は成り立つ。

[2] $n=k$ (k は自然数) のとき、①が成り立つと仮定すると,

$$A^k = \begin{pmatrix} \left(\frac{5}{2}\right)^k & 0 \\ \left(\frac{5}{2}\right)^{k-1} & 0 \end{pmatrix}$$

である。すると,

$$\begin{aligned}A^{k+1} &= AA^k \\ &= \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\frac{5}{2}\right)^k & 0 \\ \left(\frac{5}{2}\right)^{k-1} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \left(\frac{5}{2}\right)^{k+1} & 0 \\ \left(\frac{5}{2}\right)^k & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

となり、 $n=k+1$ のときも①が成立する。

以上, [1], [2] より、すべての自然数 n に対し①が成立する。したがって,

$$\begin{aligned}& -\frac{2}{5}A + \left(-\frac{2}{5}\right)^2 A^2 + \left(-\frac{2}{5}\right)^3 A^3 + \cdots + \left(-\frac{2}{5}\right)^n A^n \\ &= \sum_{k=1}^n \left(-\frac{2}{5}\right)^k A^k \\ &= \sum_{k=1}^n \left(-\frac{2}{5}\right)^k \begin{pmatrix} \left(\frac{5}{2}\right)^k & 0 \\ \left(\frac{5}{2}\right)^{k-1} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \sum_{k=1}^n \begin{pmatrix} (-1)^k & 0 \\ (-1)^k \cdot \frac{2}{5} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (n \text{ が偶数のとき}) \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -\frac{2}{5} & 0 \end{pmatrix} (n \text{ が奇数のとき}) \end{cases}\end{aligned}$$

である。

(答) n が偶数のとき $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, n が奇数のとき $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -\frac{2}{5} & 0 \end{pmatrix}$