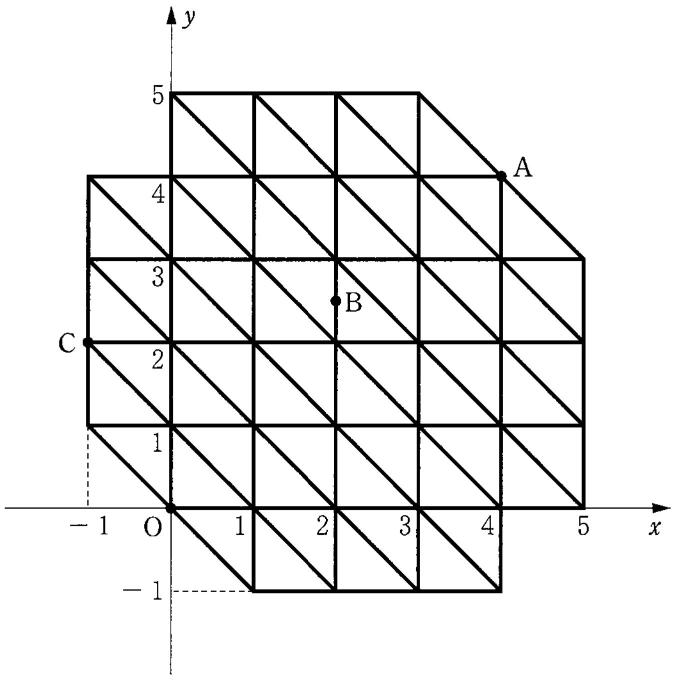
教育学部
医学部医学科
工学部
応用生物科

$\boxed{1}$ 下の図のように，xy 平面上に，x 軸に平行な道，y 軸に平行な道，直線 $y=-x$ に平行な道があるものとする。これらの道を通って，原点Oから点A(4, 4)まで行くとき，以下の各場合に道順の総数を求めよ。(配点比率 20 %)



(1) 最短経路で行く場合。

(2) 点B(2, 2.5)を通らずに，最短経路で行く場合。

(3) 点C(−1, 2)を通り，道のりが $8+\sqrt{2}$ になる場合。

(4) 道のりが $8+\sqrt{2}$ になる場合。

(5) $0 \leqq x \leqq 4$，$0 \leqq y \leqq 4$ の部分だけを通り，道のりが $8+\sqrt{2}$ になる場合。

$\boxed{2}$ 連立不等式 $y \geqq |3x-2|$, $x-4y+8 \geqq 0$ の表す領域を D とする。以下の問に答えよ。

(配点比率 20 %)

(1) 領域 D を図示せよ。

(2) 点 (x, y) が領域 D を動くとき, x^2+2x+y^2 の最小値と, それを与える点 (x, y) を求めよ。

3 平面上に点 O を中心とする半径 1 の円 S と S に内接する正三角形 ABC がある。以下の問に答えよ。(配点比率 20 %)

(1) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の値を求めよ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ。

(3) 平面上の任意の点 P に対して，以下の不等式が成り立つことを示せ。

$$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2 \geqq 3$$

また，等号が成り立つのはどのようなときか答えよ。

(4) 円 S の周上の任意の点 Q に対して，

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right)^2+\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right)^2+\left(\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right)^2=\frac{3}{2}$$

となることを示せ。

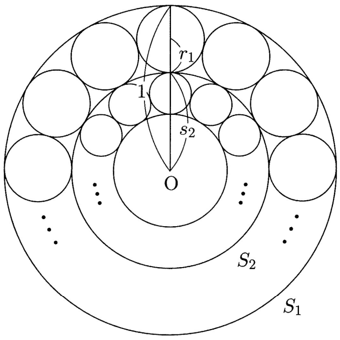
(5) 円 S の周上の任意の点 Q に対して，

$$\mathrm{AQ}^4+\mathrm{BQ}^4+\mathrm{CQ}^4$$

の値を求めよ。

2011 年 第 4 問

$\boxed{4}$ k，n は自然数で $n \geqq 3$ とする．平面上の点 O を中心とする半径 1 の円を S_1 とする．右の図のように，半径 r_1 の n 個の円は隣り合う他の 2 つの円と外接し，かつ S_1 に内接している．さらに，点 O を中心とする円 S_2 は，半径 r_1 のすべての円に外接している．同様に，$k \geqq 2$ に対して，半径 r_k の n 個の円は隣り合う他の 2 つの円と外接し，かつ円 S_k に内接している．さらに点 O を中心とする円 S_{k+1} は，半径 r_k のすべての円に外接している．S_2 の半径を s_2 とする．以下の問に答えよ．



(1) r_1 と s_2 を n を用いて表せ．

(2) 半径 r_k の 1 つの円の面積を $T_k(n)$ とする．$T_k(n)$ を k と n を用いて表せ．

(3) $U(n) = n \sum_{k=1}^{\infty} T_k(n)$ とする．$U(n)$ を求めよ．

(4) $\lim_{n \to \infty} U(n)$ を求めよ．

2011 年 第 5 問

$\boxed{5}$ $a,\ b,\ c,\ d$ を実数の定数とする．座標平面上の点 $(2,\ 1)$ を点 $(5,\ 2)$ に移す 1 次変換を表す行列を

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

とする．以下の問に答えよ．

(1) A が逆行列をもつための必要十分条件を a と c を用いて表せ．

(2) 次の式を満たす A を求めよ．

$$A^2 = \begin{pmatrix} \dfrac{25}{4} & 0 \\ \dfrac{5}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

(3) n を自然数とする．(2) で求めた A について

$$-\frac{2}{5}A + \left(-\frac{2}{5}\right)^2 A^2 + \left(-\frac{2}{5}\right)^3 A^3 + \cdots + \left(-\frac{2}{5}\right)^n A^n$$

を求めよ．