

1

(1)

$\triangle ABC$ の成立条件より

$$\begin{aligned} |\text{AB}-\text{BC}| < \text{AC} < \text{AB}+\text{BC} \\ \Leftrightarrow |1-3| < x < 1+3 \\ \Leftrightarrow 2 < x < 4 \end{aligned} \quad \dots \textcircled{1}$$

である。2組の向かい合う辺の長さが等しいことから四角形 $ABCD$ は平行四辺形である。

$\angle ABC = \theta$ とすると、 $\triangle ABC$ について余弦定理より

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\text{AB}^2 + \text{BC}^2 - \text{AC}^2}{2 \cdot \text{AB} \cdot \text{BC}} \\ &= \frac{1^2 + 3^2 - x^2}{2 \cdot 1 \cdot 3} \\ &= \frac{10 - x^2}{6} \end{aligned} \quad \dots \textcircled{2}$$

と表される。 $\sin \theta > 0$ であるから

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \\ &= \sqrt{1 - \frac{(10 - x^2)^2}{6^2}} \\ &= \frac{\sqrt{-x^4 + 20x^2 - 64}}{6} \end{aligned}$$

となる。よって、図形の対称性より四角形 $ABCD$ の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= 2 \triangle ABC \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} \text{AB} \cdot \text{BC} \sin \theta \\ &= 1 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{-x^4 + 20x^2 - 64}}{6} \\ &= \frac{\sqrt{-(x^2 - 10)^2 + 36}}{2} \end{aligned}$$

である。 $\textcircled{1}$ より、 S は

$$x^2 = 10 \text{ つまり } x = \sqrt{10} \text{ のとき最大値 } S_0 = 3$$

をとる。

$$\text{(答)} \quad S = \frac{\sqrt{-x^4 + 20x^2 - 64}}{2}, S_0 = 3$$

(2)

$$S = \frac{1}{3} S_0 \text{ であるとき}$$

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{-x^4 + 20x^2 - 64}}{2} &= \frac{1}{3} \cdot 3 \\ \Leftrightarrow \sqrt{-x^4 + 20x^2 - 64} &= 2 \\ \Leftrightarrow -x^4 + 20x^2 - 64 &= 4 \\ \Leftrightarrow x^4 - 20x^2 + 68 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 &= 10 \pm 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

となる。また、 $\angle \text{BAD} = \pi - \theta$ であるから、 $\triangle ABD$ について余弦定理より

$$\begin{aligned} \cos(\pi - \theta) &= \frac{\text{AB}^2 + \text{AD}^2 - \text{BD}^2}{2 \cdot \text{AB} \cdot \text{AD}} \\ &= \frac{1^2 + 3^2 - y^2}{2 \cdot 1 \cdot 3} \\ &= \frac{10 - y^2}{6} \end{aligned}$$

であり、 $\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$ であるから

$$\begin{aligned} -\cos \theta &= \frac{10 - y^2}{6} \\ \Leftrightarrow y^2 &= 10 + 6 \cos \theta \end{aligned}$$

となる。 $\textcircled{2}$ より

$$x^2 = 10 - 6 \cos \theta$$

であるから、以上より

$$x^2 = 10 \pm 4\sqrt{2}, y^2 = 10 \mp 4\sqrt{2} \quad (\text{複号同順})$$

となる。 $0 < x \leq y$ より $x^2 \leq y^2$ であるから

$$x^2 = 10 - 4\sqrt{2}, y^2 = 10 + 4\sqrt{2}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad x^2 = 10 - 4\sqrt{2}, y^2 = 10 + 4\sqrt{2}$$

(3)

$\triangle ABC$ について余弦定理より

$$\begin{aligned} \cos \angle \text{ACB} &= \frac{\text{AC}^2 + \text{BC}^2 - \text{AB}^2}{2 \cdot \text{AC} \cdot \text{BC}} \\ &= \frac{x^2 + 3^2 - 1^2}{2 \cdot x \cdot 3} \\ &= \frac{x^2 + 8}{6x} \\ &= \frac{1}{6} \left(x + \frac{8}{x} \right) \end{aligned}$$

となり、 $x > 0$ であるから、相加平均・相乗平均の大小関係より

$$\begin{aligned} \cos \angle \text{ACB} &= \frac{1}{6} \left(x + \frac{8}{x} \right) \\ &\geq \frac{1}{6} \cdot 2 \sqrt{x \cdot \frac{8}{x}} \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

となる。ただし、等号成立条件は

$$\begin{aligned} x &= \frac{8}{x} \\ \Leftrightarrow x^2 &= 8 \\ \Leftrightarrow x &= 2\sqrt{2} (> 0) \end{aligned}$$

となり、これは $\textcircled{1}$ を満たす。よって、 $x = 2\sqrt{2}$ のとき $\cos \angle \text{ACB}$ は最小となり、 $0 < \phi < \pi$ において $\cos \phi$ は単調減少関数であるから、 $\angle \text{ACB}$ は最大となる。

$$\text{(答)} \quad \cos \angle \text{ACB} = \frac{x^2 + 8}{6x}, x = 2\sqrt{2}$$

(1)

すべての玉の取り出し方は同様に確からしいとする。8個の玉から3個の玉を同時に取り出したとき、その取り出し方は全部で ${}_8C_3$ 通りある。また、3個の玉を同時に取り出したとき、最大番号と最小番号の差は2以上となるから $n_1 \geq 2$ である。よって、 $n_1 \geq 3$ となる事象の余事象は $n_1 = 2$ となる事象であり、このとき、取り出された3つの玉の番号は連続する3つの数である。このときの最大番号と最小番号の組み合わせは

$$(8, 6), (7, 5), (6, 4), (5, 3), (4, 2), (3, 1)$$

の6通りあり、もう一つの玉の取り出し方はそれぞれ1通りに決まるから、求める確率は

$$1 - \frac{6}{{}_8C_3} = \frac{25}{28}$$

である。

$$(\text{答}) \frac{25}{28}$$

(2)

1回目で取り出した3個の玉において、5が最大番号となるのは残りの2つの玉を1から4までの4個の玉から選ぶ場合であり、また5が最小番号となるのは残りの2つの玉を6から8までの3個の玉から選ぶ場合であるから、1回目の操作ののちに箱の中に5の番号が書かれた玉が存在しない確率は

$$\frac{{}_4C_2 + {}_3C_2}{{}_8C_3} = \frac{9}{56}$$

である。また、1回目の操作ののちに箱の中に5の番号が書かれた玉が存在するが、2回目の操作で取り出さない確率は

$$\left(1 - \frac{9}{56}\right) \times \frac{{}_5C_3}{{}_6C_3} = \frac{47}{112}$$

である。よって、2回目の操作で取り出した3個の玉の中に、5の番号が書かれた玉が含まれる事象は、上記の互いに排反である2つの事象の余事象であるから、求める確率は

$$1 - \frac{9}{56} - \frac{47}{112} = \frac{47}{112}$$

である。

$$(\text{答}) \frac{47}{112}$$

(3)

3個の玉を取り出したとき、最大番号と最小番号の差は2以上7以下となるから

$$n_1 + n_2 > 11$$

となるような (n_1, n_2) の組は

$$(n_1, n_2) = (7, 5), (6, 6), (5, 7)$$

となる。

[1] $(n_1, n_2) = (7, 5)$ のとき

$n_1 = 7$ となるのは、1回目の操作において最大番号が8、最小番号が1となる場合であり、このときの残りの1個の玉の取り出し方は6通りある。また、このとき2回目の操作を行う直前に箱に入っている玉の番号は2から7であるから、 $n_2 = 5$ となるのは、2回目の操作において最大番号が7、最小番号が2となる場合のみであり、このときの残りの1個の玉の取り出し方は4通りある。よって、このときの確率は

$$\frac{6}{{}_8C_3} \times \frac{4}{{}_6C_3} = \frac{3}{140}$$

である。

[2] $(n_1, n_2) = (6, 6)$ のとき

$n_1 = 6$ となるのは、1回目の操作における最大番号と最小番号の組が $(8, 2), (7, 1)$ である場合であり、それぞれ残りの1個の玉の取り出し方は5通りある。さらに、上記の2つの場合について $n_2 = 6$ となるのは、2回目の操作における最大番号と最小番号の組がそれぞれ $(7, 1), (8, 2)$ となる場合であり、それぞれ残りの1個の玉の取り出し方は4通りある。よって、このときの確率は

$$\frac{5}{{}_8C_3} \times \frac{4}{{}_6C_3} + \frac{5}{{}_8C_3} \times \frac{4}{{}_6C_3} = \frac{1}{28}$$

である。

[3] $(n_1, n_2) = (5, 7)$ のとき

$n_2 = 7$ となるのは、2回目の操作において最大番号が8、最小番号が1となる場合であり、このためには1回目の操作のあとに1と8の番号が書かれた玉が箱の中に残っている必要があり、 $n_1 = 5$ となるのは、1回目の操作において最大番号が7、最小番号が2となる場合のみである。このとき、1回目の操作で取り出す残りの1個の玉の取り出し方は4通りあり、2回目の操作で取り出す残りの1個の玉の取り出し方は4通りあるから、このときの確率は

$$\frac{4}{{}_8C_3} \times \frac{4}{{}_6C_3} = \frac{1}{70}$$

である。

以上、[1], [2], [3]は互いに排反であり、これらは $n_1 + n_2 \leq 11$ となる事象の余事象であるから、求める確率は

$$1 - \left(\frac{3}{140} + \frac{1}{70} + \frac{1}{28} \right) = \frac{13}{14}$$

となる。

$$(\text{答}) \frac{13}{14}$$

3

(1)

△OAQと直線PBについてメネラウスの定理より

$$\begin{aligned}\frac{OP}{PA} \cdot \frac{AR}{RQ} \cdot \frac{QB}{BO} &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{t}{1-t} \cdot \frac{AR}{RQ} \cdot \frac{1-s}{1} &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{AR}{RQ} &= \frac{1-t}{t(1-s)}\end{aligned}$$

となるから、点Rは線分AQを $1-t:t(1-s)$ に内分する。 $\overrightarrow{OQ}=s\vec{b}$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OR} &= \frac{t(1-s)}{(1-t)+t(1-s)}\overrightarrow{OA} + \frac{1-t}{(1-t)+t(1-s)}\overrightarrow{OQ} \\ &= \frac{t(1-s)}{1-ts}\vec{a} + \frac{1-t}{1-ts} \cdot s\vec{b} \\ &= \frac{t(1-s)}{1-ts}\vec{a} + \frac{(1-t)s}{1-ts}\vec{b}\end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad \overrightarrow{OR} = \frac{t(1-s)}{1-ts}\vec{a} + \frac{(1-t)s}{1-ts}\vec{b}$$

(2)

$\overrightarrow{OR} \perp \overrightarrow{AB}$ であるとき

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OR} \cdot \overrightarrow{AB} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left\{ \frac{t(1-s)}{1-ts}\vec{a} + \frac{(1-t)s}{1-ts}\vec{b} \right\} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) &= 0 \\ \Leftrightarrow \{ t(1-s)\vec{a} + (1-t)s\vec{b} \} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) &= 0 \\ \Leftrightarrow -t(1-s)|\vec{a}|^2 + (1-t)s|\vec{b}|^2 + \{ t(1-s) - (1-t)s \} \vec{a} \cdot \vec{b} &= 0 \\ \Leftrightarrow -t(1-s)|\vec{a}|^2 + (1-t)s|\vec{b}|^2 + (t-s)\vec{a} \cdot \vec{b} &= 0 \\ \Leftrightarrow s \left\{ t(|\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2) + |\vec{b}|^2 - \vec{a} \cdot \vec{b} \right\} &= t(|\vec{a}|^2 - \vec{a} \cdot \vec{b}) \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

となる。ここで、 $OA \geq OB$ であるから

$$\begin{aligned}|\vec{a}| &\geq |\vec{b}| \\ \Leftrightarrow |\vec{a}|^2 &\geq |\vec{b}|^2 \\ \Leftrightarrow |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 &\geq 0 \quad \dots \textcircled{2}\end{aligned}$$

であり、また、△OABが鋭角三角形であることから

$$\begin{aligned}|\vec{b}|^2 - \vec{a} \cdot \vec{b} &= (\vec{b} - \vec{a}) \cdot \vec{b} \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OB} \\ &> 0\end{aligned}$$

である。さらに、 $t > 0$ であるから

$$t(|\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2) + |\vec{b}|^2 - \vec{a} \cdot \vec{b} > 0 \quad \dots \textcircled{3}$$

となり、①より

$$s = \frac{t(|\vec{a}|^2 - \vec{a} \cdot \vec{b})}{t(|\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2) + |\vec{b}|^2 - \vec{a} \cdot \vec{b}}$$

と表される。

$$(答) \quad s = \frac{t(|\vec{a}|^2 - \vec{a} \cdot \vec{b})}{t(|\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2) + |\vec{b}|^2 - \vec{a} \cdot \vec{b}}$$

(3)

(2)の結果より、 $\overrightarrow{OR} \perp \overrightarrow{AB}$ であるとき

$$\begin{aligned}s - t &= \frac{t(|\vec{a}|^2 - \vec{a} \cdot \vec{b})}{t(|\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2) + |\vec{b}|^2 - \vec{a} \cdot \vec{b}} - t \\ &= \frac{t(1-t)(|\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2)}{t(|\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2) + |\vec{b}|^2 - \vec{a} \cdot \vec{b}}\end{aligned}$$

となる。 $0 < t < 1$ のとき $t(1-t) > 0$ であり、さらに②と③から

$$\begin{aligned}s - t &\geq 0 \\ \Leftrightarrow s &\geq t\end{aligned}$$

となることが示された。このとき、 $s = t$ ならば、②において等号が成り立つから $OA = OB$ となることが示された。

(証明終)

4

(1)

$X = a^x$ とおくと, $a > 1$ より $X > 0$ であるもとの

$$\begin{aligned} f(x) &= 2a^{3x+1} - a^{2x+2} - 2a^{2x} + a^{x+1} \\ &= 2aX^3 - a^2X^2 - 2X^2 + aX \\ &= 2aX^3 - (a^2 + 2)X^2 + aX \end{aligned}$$

とかける。ここで, $g(X) = 2aX^3 - (a^2 + 2)X^2 + aX$ とおくと

$$\begin{aligned} f(x) &\leq 0 \\ \Leftrightarrow g(X) &\leq 0 \\ \Leftrightarrow 2aX^3 - (a^2 + 2)X^2 + aX &\leq 0 \\ \Leftrightarrow X(aX - 1)(2X - a) &\leq 0 \\ \Leftrightarrow (aX - 1)(2X - a) &\leq 0 \quad (\because X > 0) \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

となるが, $a > \sqrt{2}$ のとき

$$0 < \frac{1}{a} < \frac{a}{2}$$

となるから

$$\begin{aligned} f(x) &\leq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{a} &\leq X \leq \frac{a}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{a} &\leq a^x \leq \frac{a}{2} \\ \Leftrightarrow -1 &\leq x \leq 1 - \log_a 2 \quad (\because a > \sqrt{2} > 1) \end{aligned}$$

である。

(答) $-1 \leq x \leq 1 - \log_a 2$

(2)

$1 < a \leq \sqrt{2}$ のとき

$$0 < \frac{a}{2} \leq \frac{1}{a}$$

であるから, ①より

$$\begin{aligned} f(x) &\leq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{a}{2} &\leq X \leq \frac{1}{a} \\ \Leftrightarrow \frac{a}{2} &\leq a^x \leq \frac{1}{a} \\ \Leftrightarrow 1 - \log_a 2 &\leq x \leq -1 \quad (\because a > 1) \end{aligned}$$

である。

(答) $1 - \log_a 2 \leq x \leq -1$

(1)

2 直線 $l_1: y = -2ax + 6$, $l_2: y = 2$ の交点の座標は

$$\begin{cases} y = -2ax + 6 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x, y) = \left(\frac{2}{a}, 2 \right) (\because a > 0)$$

となる。この交点が不等式 $y > x^2 - 2ax + a^2 + 1$ の表す領域にあるとき

$$\begin{aligned} 2 &> \left(\frac{2}{a} \right)^2 - 2a \cdot \frac{2}{a} + a^2 + 1 \\ &\Leftrightarrow a^4 - 5a^2 + 4 < 0 (\because a^2 > 0) \\ &\Leftrightarrow (a+2)(a+1)(a-1)(a-2) < 0 \\ &\Leftrightarrow 1 < a < 2 (\because a > 0) \end{aligned}$$

が成り立つ。

(答) $1 < a < 2$

(2)

 $C: y = x^2 - 2ax + a^2 + 1$ と $l_1: y = -2ax + 6$ の交点の x 座標は

$$\begin{aligned} x^2 - 2ax + a^2 + 1 &= -2ax + 6 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 5 + a^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x + \sqrt{5 - a^2})(x - \sqrt{5 - a^2}) = 0 (\because 5 - a^2 > 0) \\ &\Leftrightarrow x = \pm \sqrt{5 - a^2} \end{aligned}$$

であり、また $C: y = x^2 - 2ax + a^2 + 1$ と $l_2: y = 2$ の交点の x 座標は

$$\begin{aligned} x^2 - 2ax + a^2 + 1 &= 2 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - a - 1)(x - a + 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = a + 1, a - 1 \end{aligned}$$

である。

(答) C と l_1 の交点の x 座標: $x = \pm \sqrt{5 - a^2}$, C と l_2 の交点の x 座標: $x = a + 1, a - 1$

(3)

 l_1 上の 2 点 $(\alpha, -2a\alpha + 6)$, $(\beta, -2a\beta + 6)$ の間の距離は

$$\begin{aligned} \sqrt{(\beta - \alpha)^2 + \{(-2a\beta + 6) - (-2a\alpha + 6)\}^2} &= \sqrt{(\beta - \alpha)^2 + 4a^2(\beta - \alpha)^2} \\ &= \sqrt{1 + 4a^2} |\beta - \alpha| \end{aligned}$$

であるから、(2)の結果より C と l_1 の 2 つの交点間の距離は、 $\alpha = \sqrt{5 - a^2}$, $\beta = -\sqrt{5 - a^2}$ として

$$\sqrt{1 + 4a^2} \cdot 2\sqrt{5 - a^2} = 2\sqrt{-4a^4 + 19a^2 + 5}$$

となる。

(答) $2\sqrt{-4a^4 + 19a^2 + 5}$

(4)

 C と l_1 の 2 つの交点間の距離を d とおくと、(3)の結果より

$$\begin{aligned} d &= 2\sqrt{-4a^4 + 19a^2 + 5} \\ &= 2\sqrt{-4\left(a^2 - \frac{19}{8}\right)^2 + \frac{441}{16}} \end{aligned}$$

となる。(1)の結果より $1 < a < 2$ であるから、 $1 < a^2 < 4$ において d を最大にするような a の値は

$$\begin{aligned} a^2 &= \frac{19}{8} \\ &\Leftrightarrow a = \frac{\sqrt{38}}{4} (\because 1 < a < 2) \end{aligned}$$

となる。

(答) $a = \frac{\sqrt{38}}{4}$