

1

(1)

△ABCの成立条件より

$$|AB-BC| < AC < AB+BC$$

$$\Leftrightarrow |1-3| < x < 1+3$$

$$\Leftrightarrow 2 < x < 4$$

・・・①

である。2組の向かい合う辺の長さが等しいことから四角形ABCDは平行四辺形である。

∠ABC=θとすると、△ABCについて余弦定理より

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2\cdot AB\cdot BC} \\ &= \frac{1^2+3^2-x^2}{2\cdot 1\cdot 3}\end{aligned}$$

$$= \frac{10-x^2}{6}$$

・・・②

と表される。sinθ>0であるから

$$\begin{aligned}\sin\theta &= \sqrt{1-\cos^2\theta} \\ &= \sqrt{1-\frac{(10-x^2)^2}{6^2}} \\ &= \frac{\sqrt{-x^4+20x^2-64}}{6}\end{aligned}$$

となる。よって、図形の対称性より四角形ABCDの面積Sは

$$S = 2\triangle ABC$$

$$= 2\cdot \frac{1}{2} AB\cdot BC\sin\theta$$

$$= 1\cdot 3\cdot \frac{\sqrt{-x^4+20x^2-64}}{6}$$

$$= \frac{\sqrt{-(x^2-10)^2+36}}{2}$$

である。①より、Sは

$$x^2=10\text{つまり}x=\sqrt{10}\text{のとき最大値}S_0=3$$

をとる。

$$(\text{答}) S = \frac{\sqrt{-x^4+20x^2-64}}{2}, S_0=3$$

(2)

$S = \frac{1}{3}S_0$ であるとき

$$\frac{\sqrt{-x^4+20x^2-64}}{2} = \frac{1}{3}\cdot 3$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{-x^4+20x^2-64} = 2$$

$$\Leftrightarrow -x^4+20x^2-64 = 4$$

$$\Leftrightarrow x^4-20x^2+68 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 10 \pm 4\sqrt{2}$$

となる。また、∠BAD=π-θであるから、△ABDについて余弦定理より

$$\begin{aligned}\cos(\pi-\theta) &= \frac{AB^2+AD^2-BD^2}{2\cdot AB\cdot AD} \\ &= \frac{1^2+3^2-y^2}{2\cdot 1\cdot 3} \\ &= \frac{10-y^2}{6}\end{aligned}$$

であり、cos(π-θ)=-cosθであるから

$$-\cos\theta = \frac{10-y^2}{6}$$

$$\Leftrightarrow y^2 = 10 + 6\cos\theta$$

となる。②より

$$x^2 = 10 - 6\cos\theta$$

であるから、以上より

$$x^2 = 10 \pm 4\sqrt{2}, y^2 = 10 \mp 4\sqrt{2} \text{ (複号同順)}$$

となる。0<x≤yよりx²≤y²であるから

$$x^2 = 10 - 4\sqrt{2}, y^2 = 10 + 4\sqrt{2}$$

となる。

$$(\text{答}) x^2 = 10 - 4\sqrt{2}, y^2 = 10 + 4\sqrt{2}$$

(3)

△ABCについて余弦定理より

$$\begin{aligned}\cos\angle ACB &= \frac{AC^2+BC^2-AB^2}{2\cdot AC\cdot BC} \\ &= \frac{x^2+3^2-1^2}{2\cdot x\cdot 3} \\ &= \frac{x^2+8}{6x} \\ &= \frac{1}{6}\left(x+\frac{8}{x}\right)\end{aligned}$$

となり、x>0であるから、相加平均・相乗平均の大小関係より

$$\begin{aligned}\cos\angle ACB &= \frac{1}{6}\left(x+\frac{8}{x}\right) \\ &\geq \frac{1}{6}\cdot 2\sqrt{x\cdot \frac{8}{x}} \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3}\end{aligned}$$

となる。ただし、等号成立条件は

$$x = \frac{8}{x}$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 8$$

$$\Leftrightarrow x = 2\sqrt{2} (>0)$$

となり、これは①を満たす。よって、x=2√2のときcos∠ACBは最小となり、0<φ<πにおいてcosφは単調減少関数であるから、∠ACBは最大となる。

$$(\text{答}) \cos\angle ACB = \frac{x^2+8}{6x}, x = 2\sqrt{2}$$

(1)

すべての玉の取り出し方は同様に確からしいとする。8個の玉から3個の玉を同時に取り出したとき、その取り出し方は全部で ${}_8C_3$ 通りある。また、3個の玉を同時に取り出したとき、最大番号と最小番号の差は2以上となるから $n_1 \geq 2$ である。よって、 $n_1 \geq 3$ となる事象の余事象は $n_1 = 2$ となる事象であり、このとき、取り出された3つの玉の番号は連続する3つの数である。このときの最大番号と最小番号の組み合わせは

$$(8, 6), (7, 5), (6, 4), (5, 3), (4, 2), (3, 1)$$

の6通りあり、もう一つの玉の取り出し方はそれぞれ1通りに決まるから、求める確率は

$$1 - \frac{6}{{}_8C_3} = \frac{25}{28}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{25}{28}$$

(2)

1回目で取り出した3個の玉において、5が最大番号となるのは残りの2つの玉を1から4までの4個の玉から選ぶ場合であり、また5が最小番号となるのは残りの2つの玉を6から8までの3個の玉から選ぶ場合であるから、1回目の操作ののちに箱の中に5の番号が書かれた玉が存在しない確率は

$$\frac{{}_4C_2}{{}_8C_3} + \frac{{}_3C_2}{{}_8C_3} = \frac{9}{56}$$

である。また、1回目の操作ののちに箱の中に5の番号が書かれた玉が存在するが、2回目の操作で取り出さない確率は

$$\left(1 - \frac{9}{56}\right) \times \frac{{}_5C_3}{{}_6C_3} = \frac{47}{112}$$

である。よって、2回目の操作で取り出した3個の玉の中に、5の番号が書かれた玉が含まれる事象は、上記の互いに排反である2つの事象の余事象であるから、求める確率は

$$1 - \frac{9}{56} - \frac{47}{112} = \frac{47}{112}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{47}{112}$$

(3)

3個の玉を取り出したとき、最大番号と最小番号の差は2以上7以下となるから

$$n_1 + n_2 > 11$$

となるような (n_1, n_2) の組は

$$(n_1, n_2) = (7, 5), (6, 6), (5, 7)$$

となる。

[1] $(n_1, n_2) = (7, 5)$ のとき

$n_1 = 7$ となるのは、1回目の操作において最大番号が8、最小番号が1となる場合であり、このときの残りの1個の玉の取り出し方は6通りある。また、このとき2回目の操作を行う直前に箱に入っている玉の番号は2から7であるから、 $n_2 = 5$ となるのは、2回目の操作において最大番号が7、最小番号が2となる場合のみであり、このときの残りの1個の玉の取り出し方は4通りある。よって、このときの確率は

$$\frac{6}{{}_8C_3} \times \frac{4}{{}_6C_3} = \frac{3}{140}$$

である。

[2] $(n_1, n_2) = (6, 6)$ のとき

$n_1 = 6$ となるのは、1回目の操作における最大番号と最小番号の組が $(8, 2), (7, 1)$ である場合であり、それぞれ残りの1個の玉の取り出し方は5通りある。さらに、上記の2つの場合について $n_2 = 6$ となるのは、2回目の操作における最大番号と最小番号の組がそれぞれ $(7, 1), (8, 2)$ となる場合であり、それぞれ残りの1個の玉の取り出し方は4通りある。よって、このときの確率は

$$\frac{5}{{}_8C_3} \times \frac{4}{{}_6C_3} + \frac{5}{{}_8C_3} \times \frac{4}{{}_6C_3} = \frac{1}{28}$$

である。

[3] $(n_1, n_2) = (5, 7)$ のとき

$n_2 = 7$ となるのは、2回目の操作において最大番号が8、最小番号が1となる場合であり、このためには1回目の操作のあとに1と8の番号が書かれた玉が箱の中に残っている必要があり、 $n_1 = 5$ となるのは、1回目の操作において最大番号が7、最小番号が2となる場合のみである。このとき、1回目の操作で取り出す残りの1個の玉の取り出し方は4通りあり、2回目の操作で取り出す残りの1個の玉の取り出し方は4通りあるから、このときの確率は

$$\frac{4}{{}_8C_3} \times \frac{4}{{}_6C_3} = \frac{1}{70}$$

である。

以上、[1], [2], [3]は互いに排反であり、これらは $n_1 + n_2 \leq 11$ となる事象の余事象であるから、求める確率は

$$1 - \left(\frac{3}{140} + \frac{1}{70} + \frac{1}{28} \right) = \frac{13}{14}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{13}{14}$$

(1)

△OAQと直線PBについてメネラウスの定理より

$$\begin{aligned}\frac{OP}{PA} \cdot \frac{AR}{RQ} \cdot \frac{QB}{BO} &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{t}{1-t} \cdot \frac{AR}{RQ} \cdot \frac{1-s}{1} &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{AR}{RQ} &= \frac{1-t}{t(1-s)}\end{aligned}$$

となるから、点Rは線分AQを $1-t:t(1-s)$ に内分する。 $\overrightarrow{OQ}=s\vec{b}$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OR} &= \frac{t(1-s)}{(1-t)+t(1-s)}\overrightarrow{OA} + \frac{1-t}{(1-t)+t(1-s)}\overrightarrow{OQ} \\ &= \frac{t(1-s)}{1-ts}\vec{a} + \frac{1-t}{1-ts} \cdot s\vec{b} \\ &= \frac{t(1-s)}{1-ts}\vec{a} + \frac{(1-t)s}{1-ts}\vec{b}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OR} = \frac{t(1-s)}{1-ts}\vec{a} + \frac{(1-t)s}{1-ts}\vec{b}$$

(2)

$\overrightarrow{OR} \perp \overrightarrow{AB}$ であるとき

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OR} \cdot \overrightarrow{AB} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left\{ \frac{t(1-s)}{1-ts}\vec{a} + \frac{(1-t)s}{1-ts}\vec{b} \right\} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) &= 0 \\ \Leftrightarrow \{ t(1-s)\vec{a} + (1-t)s\vec{b} \} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) &= 0 \\ \Leftrightarrow -t(1-s)|\vec{a}|^2 + (1-t)s|\vec{b}|^2 + \{ t(1-s) - (1-t)s \} \vec{a} \cdot \vec{b} &= 0 \\ \Leftrightarrow -t(1-s)|\vec{a}|^2 + (1-t)s|\vec{b}|^2 + (t-s)\vec{a} \cdot \vec{b} &= 0 \\ \Leftrightarrow s \left\{ t(|\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2) + |\vec{b}|^2 - \vec{a} \cdot \vec{b} \right\} &= t(|\vec{a}|^2 - \vec{a} \cdot \vec{b}) \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

となる。ここで、 $OA \geq OB$ であるから

$$\begin{aligned}|\vec{a}| &\geq |\vec{b}| \\ \Leftrightarrow |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 &\geq 0 \quad \dots \textcircled{2}\end{aligned}$$

であり、また、△OABが鋭角三角形であることから

$$\begin{aligned}|\vec{b}|^2 - \vec{a} \cdot \vec{b} &= (\vec{b} - \vec{a}) \cdot \vec{b} \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OB} \\ &> 0\end{aligned}$$

である。さらに、 $t > 0$ であるから

$$t(|\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2) + |\vec{b}|^2 - \vec{a} \cdot \vec{b} > 0 \quad \dots \textcircled{3}$$

となり、①より

$$s = \frac{t(|\vec{a}|^2 - \vec{a} \cdot \vec{b})}{t(|\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2) + |\vec{b}|^2 - \vec{a} \cdot \vec{b}}$$

と表される。

$$(\text{答}) \quad s = \frac{t(|\vec{a}|^2 - \vec{a} \cdot \vec{b})}{t(|\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2) + |\vec{b}|^2 - \vec{a} \cdot \vec{b}}$$

(3)

(2)の結果より、 $\overrightarrow{OR} \perp \overrightarrow{AB}$ であるとき

$$\begin{aligned}s - t &= \frac{t(|\vec{a}|^2 - \vec{a} \cdot \vec{b})}{t(|\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2) + |\vec{b}|^2 - \vec{a} \cdot \vec{b}} - t \\ &= \frac{t(1-t)(|\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2)}{t(|\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2) + |\vec{b}|^2 - \vec{a} \cdot \vec{b}}\end{aligned}$$

となる。 $0 < t < 1$ のとき $t(1-t) > 0$ であり、さらに②と③から

$$\begin{aligned}s - t &\geq 0 \\ \Leftrightarrow s &\geq t\end{aligned}$$

となることが示された。このとき、 $s = t$ ならば、②において等号が成り立つから $OA = OB$ となることが示された。

(証明終)

(1)

$$\begin{aligned} f_1(x) &= (1 - \log x) - \frac{1}{e}(e - x) \\ &= \frac{x}{e} - \log x \end{aligned}$$

とおくと

$$f_1'(x) = \frac{1}{e} - \frac{1}{x}$$

となるから、 $0 < x < e$ のとき $f_1'(x) < 0$ となり、 $f_1(x)$ は単調減少関数である。よって

$$\begin{aligned} f_1(x) &> f_1(e) \\ \Leftrightarrow f_1(x) &> 0 \\ \Leftrightarrow (1 - \log x) - \frac{1}{e}(e - x) &> 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{e}(e - x) &< 1 - \log x \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

となる。また

$$\begin{aligned} f_2(x) &= \frac{1}{x}(e - x) - (1 - \log x) \\ &= \frac{e}{x} + \log x - 2 \end{aligned}$$

とおくと

$$f_2'(x) = -\frac{e}{x^2} + \frac{1}{x}$$

となるから、 $0 < x < e$ のとき $f_2'(x) < 0$ となり、 $f_2(x)$ は単調減少関数である。よって

$$\begin{aligned} f_2(x) &> f_2(e) \\ \Leftrightarrow f_2(x) &> 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{x}(e - x) - (1 - \log x) &> 0 \\ \Leftrightarrow 1 - \log x &< \frac{1}{x}(e - x) \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

となる。以上、①、②より、 $0 < x < e$ のとき

$$\frac{1}{e}(e - x) < 1 - \log x < \frac{1}{x}(e - x)$$

となることが示された。

(証明終)

(2)

$n = 1, 2, 3, \dots$ に対し

$$1 \leq x_n < e \quad \dots \textcircled{3}$$

であることを、数学的帰納法を用いて示す。

[1] $n = 1$ のとき

$$x_1 = 1$$

であることから、③は成り立つ。

[2] $n = k$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) において③が成り立つと仮定するとき

(1)の結果より、 $0 < x < e$ のとき

$$\begin{aligned} 1 - \log x &< \frac{1}{x}(e - x) \\ \Leftrightarrow x + x(1 - \log x) &< e \end{aligned}$$

が成り立つから、 $1 \leq x_k < e$ となるとき

$$\begin{aligned} x_k + x_k(1 - \log x_k) &< e \\ \Leftrightarrow x_{k+1} &< e \quad \dots \textcircled{4} \end{aligned}$$

である。また

$$x_{k+1} - 1 = (x_k - 1) + x_k(1 - \log x_k)$$

について、 $1 \leq x_k < e$ となるとき

$$x_k - 1 \geq 0, x_k(1 - \log x_k) > 0$$

であるから

$$\begin{aligned} x_{k+1} - 1 &> 0 \\ \Leftrightarrow 1 &< x_{k+1} \quad \dots \textcircled{5} \end{aligned}$$

となる。以上、④、⑤より、 $n = k + 1$ のときも③は成り立つ。

以上、[1]、[2]より、 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対し、 $1 \leq x_n < e$ であることが示された。

(証明終)

(3)

数列 $\{x_n\}$ の漸化式より

$$e - x_{n+1} = e - x_n - x_n(1 - \log x_n)$$

となり、 $x_n \geq 1$ であるから

$$e - x_{n+1} \leq e - x_n - 1 \cdot (1 - \log x_n)$$

となる。ここで、(2)の結果より、 $x = x_n$ において(1)で示された不等式は成り立ち

$$\frac{1}{e}(e - x_n) < 1 - \log x_n$$

となるから

$$\begin{aligned} e - x_{n+1} &< e - x_n - \frac{1}{e}(e - x_n) \\ &= \left(1 - \frac{1}{e}\right)(e - x_n) \end{aligned}$$

となり

$$e - x_{n+1} < \left(1 - \frac{1}{e}\right)(e - x_n)$$

であることは示された。

(証明終)

(4)

(2)の結果より

$$\begin{aligned} x_n &< e \\ \Leftrightarrow e - x_n &> 0 \quad \dots \textcircled{6} \end{aligned}$$

である。また、(3)の結果を繰り返し用いて

$$\begin{aligned} e - x_n &< \left(1 - \frac{1}{e}\right)^{n-1} (e - x_1) \\ &= \left(1 - \frac{1}{e}\right)^{n-1} (e - 1) \end{aligned}$$

となるから、 $\left|1 - \frac{1}{e}\right| < 1$ であることより

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (e - x_n) &< \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{e}\right)^{n-1} (e - 1) \\ &= 0 \quad \dots \textcircled{7} \end{aligned}$$

となる。以上、⑥、⑦からはさみうちの原理より

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (e - x_n) &= 0 \\ \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n &= e \end{aligned}$$

であることが示された。

(証明終)

5

(1)

$a=1$ のとき

$$x(t) = \cos 2t, y(t) = \sin t \quad (-\pi \leq t \leq \pi)$$

となり

$$\begin{aligned} x(t) &= \cos 2t \\ &= 1 - 2\sin^2 t \end{aligned}$$

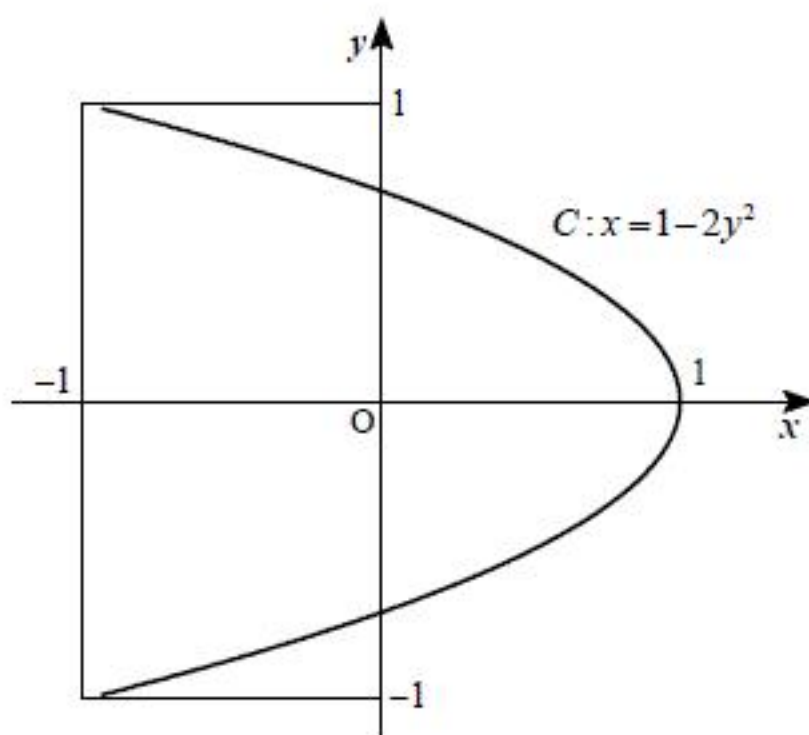
であり, また

$$-1 \leq y(t) \leq 1$$

となるから

$$C: x = 1 - 2y^2 \quad (-1 \leq y \leq 1)$$

となり, その概形は下図のようになる。



(答) $C: x = 1 - 2y^2 \quad (-1 \leq y \leq 1)$, 前図

(2)

$a=2$ のとき

$$x(t) = \cos 2t, y(t) = \sin 2t \quad (-\pi \leq t \leq \pi)$$

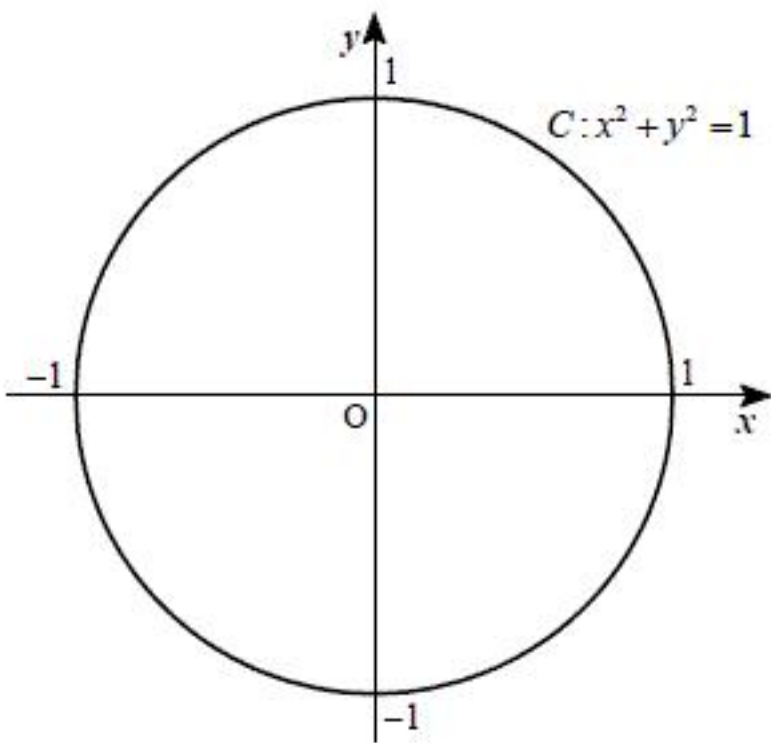
となり

$$\{x(t)\}^2 + \{y(t)\}^2 = 1$$

であるから

$$C: x^2 + y^2 = 1$$

となり, その概形は下図のようになる。



(答) $C: x^2 + y^2 = 1$, 前図

(3)

$$x(t) = \cos 2t, y(t) = \sin at \quad (-\pi \leq t \leq \pi)$$

であるとき

$$y'(t) = a \cos at$$

となる。

[1] $a=2$ のとき

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} x(t)y'(t)dt &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos 2t \cdot 2 \cos 2t dt \\ &= 2 \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 2t dt \\ &= 4 \int_0^{\pi} \cos^2 2t dt \\ &= 2 \int_0^{\pi} (1 + \cos 4t) dt \\ &= 2 \left[t + \frac{1}{4} \sin 4t \right]_0^{\pi} \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

となる。

[2] $a \neq 2$ のとき

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} x(t)y'(t)dt &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos 2t \cdot a \cos at dt \\ &= a \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \{ \cos(a+2)t + \cos(a-2)t \} dt \\ &= a \int_0^{\pi} \{ \cos(a+2)t + \cos(a-2)t \} dt \\ &= a \left[\frac{1}{a+2} \sin(a+2)t + \frac{1}{a-2} \sin(a-2)t \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{a}{a+2} \sin(a+2)\pi + \frac{a}{a-2} \sin(a-2)\pi \\ &= \frac{a}{a+2} \sin a\pi + \frac{a}{a-2} \sin a\pi \\ &= \frac{2a^2}{(a+2)(a-2)} \sin a\pi \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad a=2 \text{ のとき } \int_{-\pi}^{\pi} x(t)y'(t)dt = 2\pi, \quad a \neq 2 \text{ のとき } \int_{-\pi}^{\pi} x(t)y'(t)dt = \frac{2a^2}{(a+2)(a-2)} \sin a\pi$$

(4)

(3)の結果より, $a \neq 2$ のとき

$$P(a) = \frac{a}{a+2} \sin(a+2)\pi + \frac{a}{a-2} \sin(a-2)\pi$$

であるから

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow 2} P(a) &= \lim_{a \rightarrow 2} \left\{ \frac{a}{a+2} \sin(a+2)\pi + \frac{a}{a-2} \sin(a-2)\pi \right\} \\ &= \lim_{a \rightarrow 2} \left\{ \frac{a}{a+2} \sin(a+2)\pi + \frac{\sin(a-2)\pi}{(a-2)\pi} \cdot a\pi \right\} \\ &= \frac{2}{2+2} \sin 4\pi + 1 \cdot 2\pi \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

となる。

(答) $\lim_{a \rightarrow 2} P(a) = 2\pi$

(5)

(3)と(4)の結果より

$$\lim_{a \rightarrow 2} P(a) = P(2)$$

となるから, $P(a)$ は $a=2$ において連続である。

(答) 連続である