

1

(1)

点 A について,

$$\begin{aligned} x^2 - 2ax &= bx \Leftrightarrow x\{x - (2a + b)\} = 0 \\ \therefore x &= 0, 2a + b \end{aligned}$$

より, 点 A $(2a + b, b(2a + b))$ となる。また, 点 B について,

$$y = x^2 - 2ax = (x - a)^2 - a^2$$

より, 点 B $(a, -a^2)$ となる。

(答) $A(2a + b, b(2a + b)), B(a, -a^2)$

(2)

三角形 OAB が直角三角形となるとき, 以下の 3 通りが考えられる。

[1] $\angle AOB = 90^\circ$ のとき

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} &= 0 \\ \Leftrightarrow (2a + b, b(2a + b)) \cdot (a, -a^2) &= 0 \\ \Leftrightarrow a(2a + b) - a^2b(2a + b) &= 0 \\ \Leftrightarrow a(2a + b)(1 - ab) &= 0 \\ \therefore ab &= 1 \quad (\because a > 0, b > 0) \end{aligned}$$

となる。

[2] $\angle OBA = 90^\circ$ のとき

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{BA} &= 0 \\ \Leftrightarrow (-a, a^2) \cdot (a + b, (a + b)^2) &= 0 \\ \Leftrightarrow -a(a + b) + a^2(a + b)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow -a(a + b)(1 - a(a + b)) &= 0 \\ \therefore a(a + b) &= 1 \quad (\because a > 0, b > 0) \end{aligned}$$

となる。

[3] $\angle OAB = 90^\circ$ のとき

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB} &= 0 \\ \Leftrightarrow (-(2a + b), -b(2a + b)) \cdot (-a - b, -(a + b)^2) &= 0 \\ \Leftrightarrow (2a + b)(a + b) + b(2a + b)(a + b)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (2a + b)(a + b)(1 + b(a + b)) &= 0 \end{aligned}$$

となり, $a > 0, b > 0$ より, これを満たす a, b は存在しない。

以上, [1], [2], [3] より, 満たすべき条件は, $ab = 1$ または $a(a + b) = 1$ となる。

(答) $ab = 1$ または $a(a + b) = 1$

(3)

$a = b$ より,

$$\overrightarrow{OA} = (3a, 3a^2), \overrightarrow{OB} = (a, -a^2)$$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OA}| &= \sqrt{9a^2 + 9a^4} = 3a\sqrt{1 + a^2} \\ |\overrightarrow{OB}| &= \sqrt{a^2 + a^4} = a\sqrt{1 + a^2} \end{aligned}$$

となるので,

$$\cos \angle AOB = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}|} = \frac{3a \cdot a + 3a^2 \cdot (-a^2)}{3a\sqrt{1 + a^2} \cdot a\sqrt{1 + a^2}} = \frac{3a^2 - 3a^4}{3a^2(1 + a^2)} = \frac{1 - a^2}{1 + a^2}$$

となる。

(答) $\cos \angle AOB = \frac{1 - a^2}{1 + a^2}$

(4)

$$\overrightarrow{OA} = (3a, 3a^2), \overrightarrow{OB} = (a, -a^2)$$

より, 三角形 OAB の面積を S とすると,

$$S = \frac{1}{2} |3a \cdot (-a^2) - 3a^2 \cdot a| = 3a^3 \quad (\because a > 0)$$

となる。

(答) $3a^3$

(1)

円 C の方程式は、

$$(x-1)^2 + y^2 = 4$$

なので、 y 軸との交点の y 座標は、

$$1 + y^2 = 4$$

$$\therefore y = \pm\sqrt{3}$$

である。よって、負のほうを考えて、点 $P(0, -\sqrt{3})$ となる。

(答) $P(0, -\sqrt{3})$

(2)

点 $Q(p, q)$ 、点 $R(X, Y)$ とおく。点 R は線分 PQ の中点なので、

$$X = \frac{p}{2}, Y = \frac{q - \sqrt{3}}{2} \quad \dots \textcircled{1}$$

である。また、点 Q は円 C 上の点より、

$$(p-1)^2 + q^2 = 4 \quad \dots \textcircled{2}$$

である。①、②より、

$$(2X-1)^2 + (2Y+\sqrt{3})^2 = 4$$

$$\therefore \left(X - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(Y + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1$$

となる。よって、 R の軌跡は、中心 $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 、半径 1 の円から点 $(0, -\sqrt{3})$ を除いた部分となる。

(答) 中心 $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 、半径 1 の円から点 $(0, -\sqrt{3})$ を除いた部分

(3)

(2)と同様に、点 $Q(p, q)$ 、点 $S(X, Y)$ とおく。点 S は線分 PQ を $k:1$ に外分する点なので、

$$X = \frac{kp}{k-1}, Y = \frac{\sqrt{3} + kq}{k-1} \quad \dots \textcircled{3}$$

となり、②と③より、

$$\left(\frac{k-1}{k}X - 1\right)^2 + \left(\frac{k-1}{k}Y - \frac{\sqrt{3}}{k}\right)^2 = 4$$

$$\therefore \left(X - \frac{k}{k-1}\right)^2 + \left(Y - \frac{\sqrt{3}}{k-1}\right)^2 = \left(\frac{2k}{k-1}\right)^2$$

となる。よって、点 S の軌跡は、中心 $\left(\frac{k}{k-1}, \frac{\sqrt{3}}{k-1}\right)$ 、半径 $\left|\frac{2k}{k-1}\right|$ の円から点 $(0, -\sqrt{3})$ を除いた部分となる。

(答) 中心 $\left(\frac{k}{k-1}, \frac{\sqrt{3}}{k-1}\right)$ 、半径 $\left|\frac{2k}{k-1}\right|$ の円から点 $(0, -\sqrt{3})$ を除いた部分

(4)

$k=3$ のとき、点 S の軌跡は、

$$\text{中心 } A\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \text{ 半径 } 3 \text{ の円 } C' \text{ から点 } (0, -\sqrt{3}) \text{ を除いた部分}$$

となる。この円 C' と直線 $y = x + a + \frac{\sqrt{3}}{2}$ が共有点を持つのは、点 A と直線

$x - y + a + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$ の距離が 3 以下のときであるから、

$$\frac{\left|\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + a + \frac{\sqrt{3}}{2}\right|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} \leq 3 \Leftrightarrow \left|a + \frac{3}{2}\right| \leq 3\sqrt{2}$$

$$\therefore -\frac{3}{2} - 3\sqrt{2} \leq a \leq -\frac{3}{2} + 3\sqrt{2}$$

となる。一方、直線 $y = x + a + \frac{\sqrt{3}}{2}$ が点 $(0, -\sqrt{3})$ を通るとき、

$$-\sqrt{3} = 0 + a + \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \therefore a = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

であり、 $-\frac{3}{2} - 3\sqrt{2} < -\frac{3\sqrt{3}}{2} < -\frac{3}{2} + 3\sqrt{2}$ だから、このとき、円 C' とは異なる 2 点で交わり、

したがって、点 S の軌跡と共有点を持つ。

以上より、求める a の範囲は

$$-\frac{3}{2} - 3\sqrt{2} \leq a \leq -\frac{3}{2} + 3\sqrt{2}$$

となる。

(答) $-\frac{3}{2} - 3\sqrt{2} \leq a \leq -\frac{3}{2} + 3\sqrt{2}$

(1)

分け方は、全部で、

$${}_9C_2 \times {}_7C_2 \times {}_5C_2 \times {}_3C_2 = 22680 \text{ 通り}$$

である。

(答) 22680 通り

(2)

4人とも持っている2枚のカードの和が奇数となるには、それぞれが奇数と偶数のカードを1枚ずつ持つ必要がある。9枚のカードには、偶数が4枚、奇数が5枚含まれている。A, B, C, Dの順に配るとして、偶数のカードの配り方が ${}_4P_4$ 通り、奇数のカードの配り方が ${}_5P_4$ 通りあるので、このときの確率は、

$$\frac{{}_4P_4 \times {}_5P_4}{22680} = \frac{2880}{22680} = \frac{8}{63}$$

となる。

(答) $\frac{8}{63}$

(3)

2枚のカードの差を k とおく。以下のように場合分けを行う。

[1] $k=1$ のとき

このときのカードの組み合わせは以下になる。

$$\{(1, 2), (3, 4), (5, 6), (7, 8)\}$$

$$\{(1, 2), (3, 4), (5, 6), (8, 9)\}$$

$$\{(1, 2), (3, 4), (6, 7), (8, 9)\}$$

$$\{(1, 2), (4, 5), (6, 7), (8, 9)\}$$

$$\{(2, 3), (4, 5), (6, 7), (8, 9)\}$$

それぞれA, B, C, Dに分ける分け方は、 ${}_4P_4$ 通りあるので、全部で、

$$5 \times {}_4P_4 \text{ 通り}$$

となる。

[2] $k=2$ のとき

このときのカードの組み合わせは以下になる。

$$\{(1, 3), (2, 4), (5, 7), (6, 8)\}$$

$$\{(2, 4), (3, 5), (6, 8), (7, 9)\}$$

$$\{(1, 3), (2, 4), (6, 8), (7, 9)\}$$

それぞれA, B, C, Dに分ける分け方は、 ${}_4P_4$ 通りあるので、全部で、

$$3 \times {}_4P_4 \text{ 通り}$$

となる。

[3] $k=3$ のとき

このときのカードの組み合わせは存在しない。

[4] $k=4$ のとき

このときのカードの組み合わせは以下になる。

$$\{(1, 5), (2, 6), (3, 7), (4, 8)\}$$

$$\{(2, 6), (3, 7), (4, 8), (5, 9)\}$$

それぞれA, B, C, Dに分ける分け方は、 ${}_4P_4$ 通りあるので、全部で、

$$2 \times {}_4P_4 \text{ 通り}$$

となる。

[5] $k=5$ のとき

このときのカードの組み合わせは以下になる。

$$\{(1, 6), (2, 7), (3, 8), (4, 9)\}$$

A, B, C, Dに分ける分け方は、 ${}_4P_4$ 通りあるので、全部で、

$${}_4P_4 \text{ 通り}$$

となる。

[6] $k \geq 6$ のとき

このときのカードの組み合わせは存在しない。

以上, [1]から[6]より、求める確率は、

$$\frac{(5+3+2+1) \times {}_4P_4}{22680} = \frac{11}{945}$$

となる。

(答) $\frac{11}{945}$

(1)

三角形 A_1OA_2 について、正弦定理より、

$$\begin{aligned}\frac{OA_2}{\sin 60^\circ} &= \frac{OA_1}{\sin 105^\circ} \\ \Leftrightarrow OA_2 &= \frac{\sin 60^\circ}{\sin 105^\circ} \\ \Leftrightarrow OA_2 &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sin(60^\circ + 45^\circ)} \\ \Leftrightarrow OA_2 &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sin 60^\circ \cos 45^\circ + \cos 60^\circ \sin 45^\circ} \\ \therefore OA_2 &= \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2}$$

(2)

(1)より、正六角形 H_2 は 1 辺の長さが $\frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2}$ の正三角形 6 個からなる。この正三角形の面積は、

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2} \right)^2 \cdot \sin 60^\circ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{24 - 12\sqrt{3}}{4} \right) \\ &= \frac{3\sqrt{3}(2 - \sqrt{3})}{4}\end{aligned}$$

である。よって、求める面積 S_2 は、

$$S_2 = 6 \times \frac{3\sqrt{3}(2 - \sqrt{3})}{4} = \frac{9\sqrt{3}(2 - \sqrt{3})}{2}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{9\sqrt{3}(2 - \sqrt{3})}{2}$$

(3)

三角形 A_nOA_{n+1} について、(1)と同様にして正弦定理より、

$$\begin{aligned}\frac{OA_{n+1}}{\sin 60^\circ} &= \frac{OA_n}{\sin 105^\circ} \\ \Leftrightarrow OA_{n+1} &= \frac{\sin 60^\circ}{\sin 105^\circ} OA_n \\ \therefore OA_{n+1} &= \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2} OA_n\end{aligned}$$

となる。よって、 OA_n は初項 1、公比 $\frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2}$ の等比数列となるので、

$$OA_n = \left(\frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2} \right)^{n-1}$$

である。したがって、(2)と同様にして、求める面積 S_n は、

$$\begin{aligned}S_n &= 6 \times \frac{1}{2} \cdot \left\{ \left(\frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2} \right)^{(n-1)} \right\}^2 \cdot \sin 60^\circ \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{2} \left(\frac{24 - 12\sqrt{3}}{4} \right)^{n-1} \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{2} (6 - 3\sqrt{3})^{n-1}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{3\sqrt{3}}{2} (6 - 3\sqrt{3})^{n-1}$$

(1)

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角, $\vec{c}$ と $\vec{d}$ のなす角をそれぞれ θ_1, θ_2 とする。

$$\begin{aligned}\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow \vec{a} + \vec{b} &= -(\vec{c} + \vec{d}) \\ \Rightarrow |\vec{a} + \vec{b}|^2 &= |-(\vec{c} + \vec{d})|^2 \\ \Leftrightarrow |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 &= |\vec{c}|^2 + 2\vec{c} \cdot \vec{d} + |\vec{d}|^2 \\ \Leftrightarrow |\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta_1 + |\vec{b}|^2 &= |\vec{c}|^2 + 2|\vec{c}||\vec{d}|\cos\theta_2 + |\vec{d}|^2\end{aligned}$$

であり, ここで, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = |\vec{d}| = 1$ を用いると,

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow 1 + 2\cos\theta_1 + 1 &= 1 + 2\cos\theta_2 + 1 \\ \Leftrightarrow \cos\theta_1 &= \cos\theta_2\end{aligned}$$

となる。ここで, $0^\circ \leq \theta_1, \theta_2 \leq 180^\circ$ であることから,

$$\theta_1 = \theta_2$$

となり, $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角と $\vec{c}$ と $\vec{d}$ のなす角が等しいことがわかる。

(証明終)

(2)

(1)と同様にして,

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{d}$$

となることが分かる。よって, 与式は,

$$\begin{aligned}(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{b} + \vec{c}) &= \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} + |\vec{b}|^2 + \vec{b} \cdot \vec{c} \\ &= \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{d} + |\vec{b}|^2 + \vec{b} \cdot \vec{c} \\ &= \vec{b} \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}) \\ &= \vec{b} \cdot \vec{0} \\ &= 0\end{aligned}$$

と変形することができる。

(証明終)

(3)

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角, $\vec{b}$ と $\vec{c}$ のなす角が等しく θ とすると,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \cos\theta$$

となる。また, $\vec{a}$ と $\vec{c}$ のなす角を γ とすると,

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = \cos\gamma$$

となり, (2)の式に代入すると,

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} + |\vec{b}|^2 + \vec{b} \cdot \vec{c} &= 0 \\ \Leftrightarrow 2\cos\theta + \cos\gamma + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow \cos\gamma &= -2\cos\theta - 1\end{aligned}$$

となる。ここで, $\cos\gamma \geq -1$ より,

$$-2\cos\theta - 1 \geq -1$$

$$\therefore \cos\theta \leq 0$$

となる。

(証明終)