

1

(1)

点 A について,

$$\begin{aligned}x^2 - 2ax &= bx \Leftrightarrow x\{x - (2a + b)\} = 0 \\ \therefore x &= 0, 2a + b\end{aligned}$$

より, 点 A $(2a + b, b(2a + b))$ となる。また, 点 B について,

$$y = x^2 - 2ax = (x - a)^2 - a^2$$

より, 点 B $(a, -a^2)$ となる。

(答) $A(2a + b, b(2a + b)), B(a, -a^2)$

(2)

三角形 OAB が直角三角形となるとき, 以下の 3 通りが考えられる。

[1] $\angle AOB = 90^\circ$ のとき

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} &= 0 \\ \Leftrightarrow (2a + b, b(2a + b)) \cdot (a, -a^2) &= 0 \\ \Leftrightarrow a(2a + b) - a^2b(2a + b) &= 0 \\ \Leftrightarrow a(2a + b)(1 - ab) &= 0 \\ \therefore ab &= 1 \quad (\because a > 0, b > 0)\end{aligned}$$

となる。

[2] $\angle OBA = 90^\circ$ のとき

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{BA} &= 0 \\ \Leftrightarrow (-a, a^2) \cdot (a + b, (a + b)^2) &= 0 \\ \Leftrightarrow -a(a + b) + a^2(a + b)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow -a(a + b)(1 - a(a + b)) &= 0 \\ \therefore a(a + b) &= 1 \quad (\because a > 0, b > 0)\end{aligned}$$

となる。

[3] $\angle OAB = 90^\circ$ のとき

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB} &= 0 \\ \Leftrightarrow (-(2a + b), -b(2a + b)) \cdot (-a - b, -(a + b)^2) &= 0 \\ \Leftrightarrow (2a + b)(a + b) + b(2a + b)(a + b)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (2a + b)(a + b)(1 + b(a + b)) &= 0\end{aligned}$$

となり, $a > 0, b > 0$ より, これを満たす a, b は存在しない。

以上, [1], [2], [3] より, 満たすべき条件は, $ab = 1$ または $a(a + b) = 1$ となる。

(答) $ab = 1$ または $a(a + b) = 1$

(3)

$a = b$ より,

$$\overrightarrow{OA} = (3a, 3a^2), \overrightarrow{OB} = (a, -a^2)$$

$$|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{9a^2 + 9a^4} = 3a\sqrt{1 + a^2}$$

$$|\overrightarrow{OB}| = \sqrt{a^2 + a^4} = a\sqrt{1 + a^2}$$

となるので,

$$\cos \angle AOB = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}|} = \frac{3a \cdot a + 3a^2 \cdot (-a^2)}{3a\sqrt{1 + a^2} \cdot a\sqrt{1 + a^2}} = \frac{3a^2 - 3a^4}{3a^2(1 + a^2)} = \frac{1 - a^2}{1 + a^2}$$

となる。

(答) $\cos \angle AOB = \frac{1 - a^2}{1 + a^2}$

(4)

$$\overrightarrow{OA} = (3a, 3a^2), \overrightarrow{OB} = (a, -a^2)$$

より, 三角形 OAB の面積を S とすると,

$$S = \frac{1}{2} |3a \cdot (-a^2) - 3a^2 \cdot a| = 3a^3 \quad (\because a > 0)$$

となる。

(答) $3a^3$

(1)

円 C の方程式は,

$$(x-1)^2 + y^2 = 4$$

なので, y 軸との交点の y 座標は,

$$1 + y^2 = 4$$

$$\therefore y = \pm\sqrt{3}$$

である。よって, 負のほうを考えて, 点 $P(0, -\sqrt{3})$ となる。

(答) $P(0, -\sqrt{3})$

(2)

点 $Q(p, q)$, 点 $R(X, Y)$ とおく。点 R は線分 PQ の中点なので,

$$X = \frac{p}{2}, Y = \frac{q - \sqrt{3}}{2} \quad \dots \textcircled{1}$$

である。また, 点 Q は円 C 上の点より,

$$(p-1)^2 + q^2 = 4 \quad \dots \textcircled{2}$$

である。①, ②より,

$$(2X-1)^2 + (2Y+\sqrt{3})^2 = 4$$

$$\therefore \left(X - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(Y + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1$$

となる。よって, R の軌跡は, 中心 $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, 半径 1 の円から点 $(0, -\sqrt{3})$ を除いた部分となる。

(答) 中心 $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, 半径 1 の円から点 $(0, -\sqrt{3})$ を除いた部分

(3)

(2)と同様に, 点 $Q(p, q)$, 点 $S(X, Y)$ とおく。点 S は線分 PQ を $k:1$ に外分する点なので,

$$X = \frac{kp}{k-1}, Y = \frac{\sqrt{3} + kq}{k-1} \quad \dots \textcircled{3}$$

となり, ②と③より,

$$\left(\frac{k-1}{k}X - 1\right)^2 + \left(\frac{k-1}{k}Y - \frac{\sqrt{3}}{k}\right)^2 = 4$$

$$\therefore \left(X - \frac{k}{k-1}\right)^2 + \left(Y - \frac{\sqrt{3}}{k-1}\right)^2 = \left(\frac{2k}{k-1}\right)^2$$

となる。よって, 点 S の軌跡は, 中心 $\left(\frac{k}{k-1}, \frac{\sqrt{3}}{k-1}\right)$, 半径 $\left|\frac{2k}{k-1}\right|$ の円から点 $(0, -\sqrt{3})$ を除いた部分となる。

(答) 中心 $\left(\frac{k}{k-1}, \frac{\sqrt{3}}{k-1}\right)$, 半径 $\left|\frac{2k}{k-1}\right|$ の円から点 $(0, -\sqrt{3})$ を除いた部分

(4)

$k=3$ のとき, 点 S の軌跡は,

中心 $A\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, 半径 3 の円 C' から点 $(0, -\sqrt{3})$ を除いた部分

となる。この円 C' と直線 $y = x + a + \frac{\sqrt{3}}{2}$ が共有点を持つのは, 点 A と直線

$x - y + a + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$ の距離が 3 以下のときであるから,

$$\frac{\left|\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + a + \frac{\sqrt{3}}{2}\right|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} \leq 3 \Leftrightarrow \left|a + \frac{3}{2}\right| \leq 3\sqrt{2}$$

$$\therefore -\frac{3}{2} - 3\sqrt{2} \leq a \leq -\frac{3}{2} + 3\sqrt{2}$$

となる。一方, 直線 $y = x + a + \frac{\sqrt{3}}{2}$ が点 $(0, -\sqrt{3})$ を通るとき,

$$-\sqrt{3} = 0 + a + \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \therefore a = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

であり, $-\frac{3}{2} - 3\sqrt{2} < -\frac{3\sqrt{3}}{2} < -\frac{3}{2} + 3\sqrt{2}$ だから, このとき, 円 C' とは異なる 2 点で交わり,

したがって, 点 S の軌跡と共有点を持つ。

以上より, 求める a の範囲は

$$-\frac{3}{2} - 3\sqrt{2} \leq a \leq -\frac{3}{2} + 3\sqrt{2}$$

となる。

(答) $-\frac{3}{2} - 3\sqrt{2} \leq a \leq -\frac{3}{2} + 3\sqrt{2}$

(1)

分け方は、全部で、

$${}_9C_2 \times {}_7C_2 \times {}_5C_2 \times {}_3C_2 = 22680 \text{ 通り}$$

である。

(答) 22680 通り

(2)

4人とも持っている2枚のカードの和が奇数となるには、それぞれが奇数と偶数のカードを1枚ずつ持つ必要がある。9枚のカードには、偶数が4枚、奇数が5枚含まれている。A, B, C, Dの順に配るとして、偶数のカードの配り方が ${}_4P_4$ 通り、奇数のカードの配り方が ${}_5P_4$ 通りあるので、このときの確率は、

$$\frac{{}_4P_4 \times {}_5P_4}{22680} = \frac{2880}{22680} = \frac{8}{63}$$

となる。

(答) $\frac{8}{63}$

(3)

2枚のカードの差を k とおく。以下のように場合分けを行う。

[1] $k=1$ のとき

このときのカードの組み合わせは以下になる。

$$\begin{aligned} &\{(1, 2), (3, 4), (5, 6), (7, 8)\} \\ &\{(1, 2), (3, 4), (5, 6), (8, 9)\} \\ &\{(1, 2), (3, 4), (6, 7), (8, 9)\} \\ &\{(1, 2), (4, 5), (6, 7), (8, 9)\} \\ &\{(2, 3), (4, 5), (6, 7), (8, 9)\} \end{aligned}$$

それぞれA, B, C, Dに分ける分け方は、 ${}_4P_4$ 通りあるので、全部で、

$$5 \times {}_4P_4 \text{ 通り}$$

となる。

[2] $k=2$ のとき

このときのカードの組み合わせは以下になる。

$$\begin{aligned} &\{(1, 3), (2, 4), (5, 7), (6, 8)\} \\ &\{(2, 4), (3, 5), (6, 8), (7, 9)\} \\ &\{(1, 3), (2, 4), (6, 8), (7, 9)\} \end{aligned}$$

それぞれA, B, C, Dに分ける分け方は、 ${}_4P_4$ 通りあるので、全部で、

$$3 \times {}_4P_4 \text{ 通り}$$

となる。

[3] $k=3$ のとき

このときのカードの組み合わせは存在しない。

[4] $k=4$ のとき

このときのカードの組み合わせは以下になる。

$$\begin{aligned} &\{(1, 5), (2, 6), (3, 7), (4, 8)\} \\ &\{(2, 6), (3, 7), (4, 8), (5, 9)\} \end{aligned}$$

それぞれA, B, C, Dに分ける分け方は、 ${}_4P_4$ 通りあるので、全部で、

$$2 \times {}_4P_4 \text{ 通り}$$

となる。

[5] $k=5$ のとき

このときのカードの組み合わせは以下になる。

$$\{(1, 6), (2, 7), (3, 8), (4, 9)\}$$

A, B, C, Dに分ける分け方は、 ${}_4P_4$ 通りあるので、全部で、

$${}_4P_4 \text{ 通り}$$

となる。

[6] $k \geq 6$ のとき

このときのカードの組み合わせは存在しない。

以上, [1]から[6]より、求める確率は、

$$\frac{(5+3+2+1) \times {}_4P_4}{22680} = \frac{11}{945}$$

となる。

(答) $\frac{11}{945}$

(1)

与式より,

$$\begin{aligned}
 f_2(x) &= 2 \int_1^x f_1(t) dt + \frac{1}{1+1} (x^2 - 1) \\
 &= 2 \int_1^x t \log t dt + \frac{1}{2} (x^2 - 1) \\
 &= 2 \left[\frac{1}{2} t^2 \log t - \frac{1}{4} t^2 \right]_1^x + \frac{1}{2} (x^2 - 1) \\
 &= x^2 \log x
 \end{aligned}$$

となる。

(答) $x^2 \log x$

(2)

(1)より,

$$f_n(x) = x^n \log x \quad \dots \textcircled{1}$$

と推測することができる。以下、数学的帰納法により、全ての自然数 n について①が成り立つことを示す。

[1] $n=1$ のとき

$$f_1(x) = x \log x$$

より、このとき①は成り立つ。

[2] $n=k$ のとき

このとき①が成り立つとすると,

$$f_k(x) = x^k \log x$$

であり,

$$\begin{aligned}
 f_{k+1}(x) &= (k+1) \int_1^x f_k(t) dt + \frac{1}{k+1} (x^{k+1} - 1) \\
 &= (k+1) \int_1^x t^k \log t dt + \frac{1}{k+1} (x^{k+1} - 1) \\
 &= (k+1) \left[\frac{1}{k+1} t^{k+1} \log t - \frac{1}{(k+1)^2} t^{k+1} \right]_1^x + \frac{1}{k+1} (x^{k+1} - 1) \\
 &= x^{k+1} \log x
 \end{aligned}$$

となるので、 $n=k+1$ のときも①は成り立つ。以上、[1], [2]より、全ての自然数 n について①が成り立つ。

(証明終)

(3)

(1)より,

$$g(x) = |x^2 \log x| - |x-1|$$

と表される。ここで,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(1+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(1+h) - \log 1}{(1+h) - 1} = (\log x \text{ の } x=1 \text{ での微分係数}) = 1$$

に注意すると,

$$\begin{aligned}
 \lim_{h \rightarrow -0} \frac{g(1+h) - g(1)}{h} &= \lim_{h \rightarrow -0} \frac{-(1+h)^2 \log(1+h) + h}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow -0} \left\{ -(1+h)^2 \cdot \frac{\log(1+h)}{h} + 1 \right\} \\
 &= -1^2 \cdot 1 + 1 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

であり、また,

$$\begin{aligned}
 \lim_{h \rightarrow +0} \frac{g(1+h) - g(1)}{h} &= \lim_{h \rightarrow +0} \frac{(1+h)^2 \log(1+h) - h}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow +0} \left\{ (1+h)^2 \cdot \frac{\log(1+h)}{h} - 1 \right\} \\
 &= 1^2 \cdot 1 - 1 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

となるので、 $g(x)$ は $x=1$ で微分可能である。

(証明終)

また、微分係数 $g'(1) = 0$ である。(答) $g'(1) = 0$

(1)

ケーリー・ハミルトンの定理より、

$$A^2 - \sqrt{2}aA + (b^2 - 4a^2)E = 0$$

である。

$$A^2 = pA + qE$$

$$a^2 + \frac{b^2}{6} = 1 \Leftrightarrow b^2 = 6 - 6a^2$$

を代入すると、

$$\begin{aligned} (pA + qE) - \sqrt{2}aA + (b^2 - 4a^2)E &= 0 \\ \Leftrightarrow (p - \sqrt{2}a)A &= (-q + 10a^2 - 6)E \end{aligned}$$

となる。ここで、 $p - \sqrt{2}a \neq 0$ とすると、

$$A = \frac{-q + 10a^2 - 6}{p - \sqrt{2}}E$$

となり、 $b > 0$ に反するため、

$$\begin{cases} p - \sqrt{2}a = 0 \\ -q + 10a^2 - 6 = 0 \end{cases}$$

$$\therefore p = \sqrt{2}a, q = 10a^2 - 6$$

となる。

(答) $p = \sqrt{2}a, q = 10a^2 - 6$

(2)

$a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき、(1)の結果より、

$$A^2 = A - E \Leftrightarrow A^2 - A + E = O$$

となる。また、

$$\begin{aligned} b^2 &= 6 - 6a^2 = 3 \\ \therefore b &= \sqrt{3} \quad (\because b > 0) \end{aligned}$$

である。したがって、

$$A^3 = A \cdot A^2 = A(A - E) = A^2 - A = -E$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{100} (-1)^k A^k &= \sum_{j=1}^{33} (-1)^{3j-2} (A^{3j-2} - A^{3j-1} + A^{3j}) + A^{100} \\ &= \sum_{j=1}^{33} (-1)^{3j-2} A^{3j-2} (E - A + A^2) + A(A^3)^{33} \\ &= A \cdot (-E)^{33} \\ &= -A \\ &= \begin{pmatrix} -2 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である。

(答) $\begin{pmatrix} -2 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$

(3)

$$A^m \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left(A^m - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

であるから、問題の方程式が $x = y = 0$ 以外の解をもつことと、 $B = A^m - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ が逆行列を持たないことは同値である。(2)の計算より、

$$A^6 = (A^3)^2 = (-E)^2 = E$$

であったから、 m を 6 で割った余り k に注目して場合分けをすると次のような表を得る。

(以下、行列 $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対し、 $\det X = ad - bc$ とする。)

k	0	1	2	3	4	5
A^m	E	A	$A - E$	$-E$	$-A$	$-(A - E)$
B	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 2 \end{pmatrix}$
$\det B$	2	0	1	0	2	3

したがって、逆行列を持たないような m のみたす条件は、

m を 6 で割った余りが、1 または 3 となること

である。

(答) m を 6 で割った余りが、1 または 3 となること