

平成 25 年 度
前 期 日 程

数 学

教育学部[数学(口)]

医学部医学科

工学部

問 題 冊 子

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで、問題冊子を開かないこと。
2. 本冊子は 5 ページで、解答用紙は 5 枚である。
落丁、乱丁、印刷不鮮明などの箇所があった場合には、ただちに試験監督者に申し出ること。
3. 受験番号は、5 枚の解答用紙のそれぞれの指定箇所に必ず記入すること。
4. 問題は、大問 5 題である。
5. 解答は、解答用紙の指定箇所に記入すること。(ただし、やむをえない場合は裏面にまわってよい。)
6. 問題用紙の余白は計算に用いてよい。
7. 解答用紙は持ち帰らないこと。
8. 問題冊子は持ち帰ること。
9. 大問ごとに、満点に対する配点の比率(%)を表示してある。

教育学部[数学(口)]

医学部医学科

工学部

1 a, b を正の実数とする。 xy 平面上の放物線 $y = x^2 - 2ax$ と直線 $y = bx$ は原点 O と点 A の異なる 2 点で交わる。また、放物線の頂点を B とし、三角形 OAB を考える。以下の問に答えよ。

- (1) 点 A および点 B の座標を求めよ。
- (2) 三角形 OAB が直角三角形のとき、 a と b の満たすべき条件を求めよ。
- (3) $a = b$ のとき、 $\cos \angle AOB$ を a を用いて表せ。
- (4) $a = b$ のとき、三角形 OAB の面積を a を用いて表せ。

(配点比率 20 %)

2 xy 平面上に中心 $(1, 0)$ 、半径 2 の円 C がある。円 C と y 軸との交点のうち、 y 座標が負である点を P とする。以下の問に答えよ。

- (1) 点 P の座標を求めよ。
- (2) 点 Q が円 C の周から点 P を除いた部分を動くとき、線分 PQ の中点 R の軌跡を求めよ。
- (3) 点 Q は円 C の周から点 P を除いた部分を動くとする。また、 k を 1 以外の正の実数とし、線分 PQ を $k:1$ に外分する点を S とする。このとき点 S の軌跡を求めよ。
- (4) $k=3$ のとき、直線 $y = x + a + \frac{\sqrt{3}}{2}$ が (3) で求めた軌跡と共有点をもつような a の値の範囲を求めよ。

(配点比率 20 %)

3 1 から 9 までの数字が 1 つずつ重複せずに書かれた 9 枚のカードがある。そのうち 8 枚のカードを A, B, C, D の 4 人に 2 枚ずつ分ける。以下の問に答えよ。

- (1) 9 枚のカードの分け方は全部で何通りあるか。
- (2) 各人が持っている 2 枚のカードに書かれた数の和が 4 人とも奇数である確率を求めよ。
- (3) 各人が持っている 2 枚のカードに書かれた数の差が 4 人とも同じである確率を求めよ。ただし、2 枚のカードに書かれた数の差とは、大きいほうの数から小さいほうの数を引いた数である。

(配点比率 20 %)

- 4 正の整数 n について, $x > 0$ で定義された関数 $f_n(x)$ を次で定める。

$$f_1(x) = x \log x$$

$$f_{n+1}(x) = (n+1) \int_1^x f_n(t) dt + \frac{1}{n+1} (x^{n+1} - 1)$$

以下の問に答えよ。ただし, $\log x$ は x の自然対数とする。

- (1) 関数 $f_2(x)$ を求めよ。
- (2) 関数 $f_n(x)$ の具体的な形を推測し, それを数学的帰納法で証明せよ。
- (3) $g(x) = |f_2(x)| - |x - 1|$ とおくとき, $g(x)$ が $x = 1$ で微分可能であることを証明せよ。
また, 微分係数 $g'(1)$ を求めよ。

(配点比率 20 %)

5 a, b を $a^2 + \frac{b^2}{6} = 1$ を満たす正の実数とする。行列 $A = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2}a & b \\ -b & -\sqrt{2}a \end{pmatrix}$ に対して、以下の問に答えよ。

(1) 実数 p, q が $A^2 = pA + qE$ を満たすとき、 p, q を a を用いて表せ。ただし、 E は 2 次の単位行列とする。

(2) $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき、 $\sum_{k=1}^{100} (-1)^k A^k$ を求めよ。

(3) $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ とし、 m を正の整数とする。 x と y についての方程式 $A^m \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ 0 \end{pmatrix}$ が $x = y = 0$ 以外の解をもつとき、 m の満たす条件を求めよ。

(配点比率 20 %)