

(1)

△BCPについて、余弦定理より、

$$BP^2 = BC^2 + CP^2 - 2 \cdot BC \cdot CP \cos \angle C$$

$$\Leftrightarrow BP^2 = 4 + t^2 - 2 \cdot 2 \cdot t \cdot \frac{1}{2}$$

$$\therefore BP = \sqrt{t^2 - 2t + 4}$$

である。同様にして、△APQについて、余弦定理より、

$$PQ^2 = AP^2 + AQ^2 - 2 \cdot AP \cdot AQ \cos \angle A$$

$$\Leftrightarrow PQ^2 = (2-t)^2 + t^2 - 2 \cdot (2-t) \cdot t \cdot \frac{1}{2}$$

$$\therefore PQ = \sqrt{3t^2 - 6t + 4}$$

となる。また、BP = QB である。

$$(\text{答}) \quad BP = QB = \sqrt{t^2 - 2t + 4}, \quad PQ = \sqrt{3t^2 - 6t + 4}$$

(2)

(1)より、

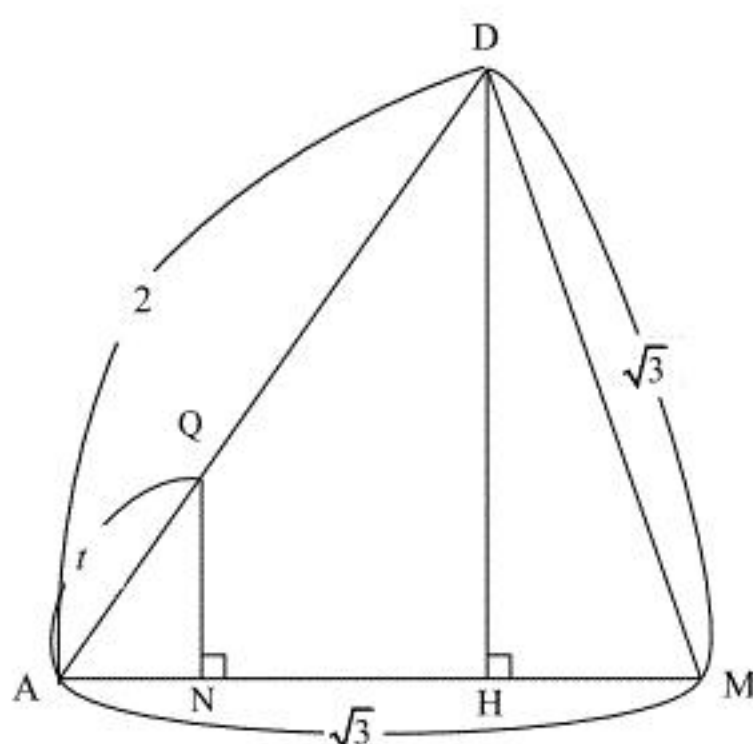
$$\begin{aligned} BP + PQ + QB &= 2\sqrt{t^2 - 2t + 4} + \sqrt{3t^2 - 6t + 4} \\ &= 2\sqrt{(t-1)^2 + 3} + \sqrt{3(t-1)^2 + 1} \end{aligned}$$

となる。よって、 $t=1$ のとき、最小値 $2\sqrt{3}+1$ をとる。

$$(\text{答}) \quad 2\sqrt{3}+1$$

(3)

辺BCの中点を点Mとおく。△AMDは下図のような位置関係となる。



点DからABCに下した垂線の足をHとおくと、点Hは三角形ABCの重心だから、

AH:HM=2:1より、上図から

$$AH = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

であり、三平方の定理より、

$$DH^2 = 4 - \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2$$

$$\therefore DH = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

となる。よって、△AQN ∽ △ADH より

$$QN : \frac{2\sqrt{6}}{3} = t : 2$$

$$\therefore QN = \frac{\sqrt{6}}{3}t$$

である。ここで、△ABPの面積は

$$\begin{aligned} \triangle ABP &= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (2-t) \cdot \sin \angle A \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} (2-t) \end{aligned}$$

である。以上より、三角錐ABPQの体積は

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} (2-t) \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} t = \frac{\sqrt{2}}{6} t (2-t)$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{\sqrt{2}}{6} t (2-t)$$

(4)

(3)より、三角錐ABPQの体積は

$$\frac{\sqrt{2}}{6} t (2-t) = -\frac{\sqrt{2}}{6} (t-1)^2 + \frac{\sqrt{2}}{6}$$

と変形できるから、 $t=1$ のとき最大値 $\frac{\sqrt{2}}{6}$ をとる。

$$(\text{答}) \quad \frac{\sqrt{2}}{6}$$

(1)

$f(1)=0$ となればよいから、

$$\begin{aligned} f(1) &= 0 \\ \Leftrightarrow 3a - 2b + 3c &= 0 \\ \Leftrightarrow b &= \frac{3}{2}(a+c) \end{aligned}$$

となる。 a, b, c は 1 から 6 の整数より、

$$\begin{aligned} b &\leq 6 \\ \Leftrightarrow \frac{3}{2}(a+c) &\leq 6 \\ \Leftrightarrow a+c &\leq 4 \end{aligned}$$

であり、 $a+c$ は 4 以下の偶数である。よって、以上を満たす a, b, c の組は

$$(a, b, c) = (1, 3, 1), (1, 6, 3), (2, 6, 2), (3, 6, 1)$$

の 4 通りである。 a, b, c の組は全部で 216 通りあるから、求める確率は

$$\frac{4}{216} = \frac{1}{54}$$

となる。

(答) $\frac{1}{54}$

(2)

$f(x)$ の判別式 D について

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &> 0 \\ \Leftrightarrow b^2 - 9ac &> 0 \\ \Leftrightarrow b &> 3\sqrt{ac} \end{aligned}$$

となればよい。よって、

$$\begin{aligned} 3\sqrt{ac} < b &\leq 6 \\ \Leftrightarrow 3\sqrt{ac} &< 6 \\ \Leftrightarrow ac &< 4 \end{aligned}$$

である。よって、以上を満たす a, b, c の組は

$$\begin{aligned} (a, b, c) &= (1, 4, 1), (1, 5, 1), (1, 6, 1), (1, 5, 2), \\ &\quad (1, 6, 2), (1, 6, 3), (2, 5, 1), (2, 6, 1), (3, 6, 1) \end{aligned}$$

の 9 通りであり、求める確率は

$$\frac{9}{216} = \frac{1}{24}$$

となる。

(答) $\frac{1}{24}$

(3)

$f(x)=0$ を満たす 2 つの解を α, β ($\alpha < \beta$) とおく。このとき求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_{\alpha}^{\beta} -f(x) dx \\ &= -\int_{\alpha}^{\beta} 3a(x-\alpha)(x-\beta) dx \\ &= -3a \int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\alpha+\alpha-\beta) dx \\ &= -3a \int_{\alpha}^{\beta} \left\{ (x-\alpha)^2 + (\alpha-\beta)(x-\alpha) \right\} dx \\ &= -3a \left[\frac{(x-\alpha)^3}{3} + (\alpha-\beta) \frac{(x-\alpha)^2}{2} \right]_{\alpha}^{\beta} \\ &= -3a \cdot \frac{-(\beta-\alpha)^3}{6} \\ &= \frac{a}{2} \cdot (\beta-\alpha)^3 \end{aligned}$$

と表せる。ここで、解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = \frac{2b}{3a}, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

であり、

$$\begin{aligned} (\beta-\alpha)^2 &= (\beta+\alpha)^2 - 4\alpha\beta \\ &= \frac{4b^2}{9a^2} - \frac{4c}{a} \\ &= \frac{4(b^2-9ac)}{9a^2} \end{aligned}$$

$$\therefore \beta - \alpha = \frac{2\sqrt{b^2-9ac}}{3a}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} S &= \frac{a}{2} \cdot (\beta-\alpha)^3 \\ &= \frac{a}{2} \cdot \left(\frac{2\sqrt{b^2-9ac}}{3a} \right)^3 \\ &= \frac{4}{27a^2} \left(\sqrt{b^2-9ac} \right)^3 \end{aligned}$$

となり、 a, c が最小かつ b が最大である $(a, b, c) = (1, 6, 1)$ のとき S は最大となる。よって、

$$\begin{aligned} S &= \frac{4}{27} \cdot \left(\sqrt{36-9} \right)^3 \\ &= 12\sqrt{3} \end{aligned}$$

である。

(答) $12\sqrt{3}$

(1)

二項定理を用いて、

$$\begin{aligned}
 2014^{10} &= 2^{10} \times 1007^{10} \\
 &= 1024 \cdot (10^3 + 7)^{10} \\
 &= 1024 \cdot \sum_{k=0}^{10} {}_{10}C_k \cdot 10^{3(10-k)} \cdot 7^k \quad \cdots \textcircled{1}
 \end{aligned}$$

と変形できる。ここで、 $k=9$ のとき①は

$$1024 \cdot {}_{10}C_9 \cdot 10^3 \cdot 7^9$$

であり、少なくとも千の位までは数字は0である。よって、十の位の数字を考えるには、 $k=10$ のときのみを考えればよい。 $k=10$ のとき①は、

$$1024 \cdot {}_{10}C_{10} \cdot 10^0 \cdot 7^{10} = 1024 \cdot 7^{10}$$

である。下二桁のみ計算すればよいから、

$$24 \times 49 = 1176$$

より、十の位の数字は7である。

(答) 7

(2)

(1)と同様に考えていく。 $k=8$ のとき①は

$$1024 \cdot {}_{10}C_8 \cdot 10^6 \cdot 7^8$$

であり、少なくとも百万の位までは数字は0である。よって、十万の位の数字を考えるには、 $k=9, 10$ のときのみを考えればよい。よって、

$$\begin{aligned}
 1024 \cdot (10 \times 10^3 \times 7^9 + 7^{10}) &= 1024 \times 7^9 \times 10007 \\
 &= 413510190334976
 \end{aligned}$$

となるから、十万の位の数字は3である。

(答) 3

(3)

$k=0$ のとき①は

$$1024 \cdot {}_{10}C_0 \cdot 10^{30} = 1024 \cdot 10^{30}$$

であり、 $k=1$ のとき①は

$$1024 \cdot {}_{10}C_1 \cdot 10^{27} \cdot 7 = 1024 \cdot 7 \cdot 10^{28}$$

であり、 $k=2$ のとき①は

$$1024 \cdot {}_{10}C_2 \cdot 10^{24} \cdot 7^2 = \frac{1024 \cdot 9 \cdot 7^2}{2} \cdot 10^{25}$$

である。よって、上3桁の数字を求めるには、 $k=0, 1$ のときのみを考えればよい。よって、

$$\begin{aligned}
 1024 \cdot 10^{30} + 1024 \cdot 7 \cdot 10^{28} &= 1024 \cdot (10^2 + 7) \cdot 10^{28} \\
 &= 109568 \cdot 10^{28}
 \end{aligned}$$

となるから、上3桁の数字は109である。

(答) 109

(1)

$$\begin{aligned}\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} &= \frac{a-2\sqrt{ab}+b}{2} \\ &= \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \\ &\geq 0\end{aligned}$$

となるから、

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

が示せた。また、等号成立は

$$\begin{aligned}\sqrt{a}-\sqrt{b} &= 0 \\ \Leftrightarrow a &= b\end{aligned}$$

の場合だけである。

(証明終)

(2)

(1)より、

$$a+b \geq 2\sqrt{ab} \quad \dots\dots ①$$

$$b+c \geq 2\sqrt{bc} \quad \dots\dots ②$$

$$c+a \geq 2\sqrt{ca} \quad \dots\dots ③$$

がそれぞれ成り立つ。①、②、③の辺々かけると

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc \quad \dots\dots ④$$

となる。また、等号成立は①、②、③が全て成り立つときであり、 $a=b=c$ のときである。

(証明終)

(3)

$$-\alpha + \beta + \gamma = a \quad \dots\dots ⑤$$

$$\alpha - \beta + \gamma = b \quad \dots\dots ⑥$$

$$\alpha + \beta - \gamma = c \quad \dots\dots ⑦$$

とおく。 α, β, γ は三角形の3辺の長さであるから、

$$\beta + \gamma > \alpha, \gamma + \alpha > \beta, \alpha + \beta > \gamma$$

より、 $a, b, c > 0$ であり、④の不等式が利用できる。よって、

$$a+b=2\gamma$$

$$b+c=2\alpha$$

$$c+a=2\beta$$

であるから、④より、

$$8\alpha\beta\gamma \geq 8(-\alpha + \beta + \gamma)(\alpha - \beta + \gamma)(\alpha + \beta - \gamma)$$

$$\therefore \alpha\beta\gamma \geq (-\alpha + \beta + \gamma)(\alpha - \beta + \gamma)(\alpha + \beta - \gamma)$$

となる。また、等号成立は $a=b=c$ より

$$-\alpha + \beta + \gamma = \alpha - \beta + \gamma = \alpha + \beta - \gamma$$

$$\therefore \alpha = \beta = \gamma$$

のときである。

(証明終)

(4)

⑤、⑥、⑦より、

$$\begin{aligned}\frac{\alpha}{-\alpha + \beta + \gamma} + \frac{\beta}{\alpha - \beta + \gamma} + \frac{\gamma}{\alpha + \beta - \gamma} &= \frac{b+c}{2a} + \frac{c+a}{2b} + \frac{a+b}{2c} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{c}{b} + \frac{b}{c}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) \\ &\geq \sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{c}{b} \cdot \frac{b}{c}} + \sqrt{\frac{a}{c} \cdot \frac{c}{a}} \\ &= 3\end{aligned}$$

となる。また、等号成立は

$$\frac{b}{a} = \frac{a}{b} \text{ かつ } \frac{c}{b} = \frac{b}{c} \text{ かつ } \frac{a}{c} = \frac{c}{a}$$

が同時に成り立つときであり、 $a=b=c$ のときである。よって、(3)より、 $\alpha = \beta = \gamma$ 、つまり正三角形のときとなる。

(証明終)

(1)

$$a_2 = 1 - \frac{1}{4 \cdot \frac{3}{4}} = \frac{2}{3}$$

$$a_3 = 1 - \frac{1}{4 \cdot \frac{2}{3}} = \frac{5}{8}$$

$$a_4 = 1 - \frac{1}{4 \cdot \frac{5}{8}} = \frac{3}{5}$$

$$a_5 = 1 - \frac{1}{4 \cdot \frac{3}{5}} = \frac{7}{12}$$

$$a_6 = 1 - \frac{1}{4 \cdot \frac{7}{12}} = \frac{4}{7}$$

となる。ここで、それぞれ約分せずに表すと

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6) = \left(\frac{3}{4}, \frac{4}{6}, \frac{5}{8}, \frac{6}{10}, \frac{7}{12}, \frac{8}{14} \right)$$

となるから、

$$a_n = \frac{n+2}{2n+2} \quad \cdots \textcircled{1}$$

と推定できる。

$$(\text{答}) \quad (a_2, a_3, a_4, a_5, a_6) = \left(\frac{2}{3}, \frac{5}{8}, \frac{3}{5}, \frac{7}{12}, \frac{4}{7} \right), a_n = \frac{n+2}{2n+2}$$

(2)

自然数 n に対して、 $\textcircled{1}$ が成り立つことを数学的帰納法によって証明する。

[1] $n=1$ のとき

このとき、

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{3}{4} \\ &= \frac{1+2}{2 \cdot 1 + 2} \end{aligned}$$

となるから、 $\textcircled{1}$ は成り立つ。

[2] $n=k$ のとき

このとき、 $\textcircled{1}$ が成り立つとすると

$$a_k = \frac{k+2}{2k+2}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 1 - \frac{1}{4a_k} \\ &= 1 - \frac{1}{4 \cdot \frac{k+2}{2k+2}} \\ &= 1 - \frac{k+1}{2k+4} \\ &= \frac{k+3}{2k+4} \\ &= \frac{(k+1)+2}{2(k+1)+2} \end{aligned}$$

となるから、 $n=k+1$ のときも $\textcircled{1}$ は成り立つ。

以上、[1], [2] より、自然数 n に対して $\textcircled{1}$ が成り立つことが示せた。

(証明終)

(3)

(2) より、

$$\begin{aligned} a_n x^2 + x + 1 - a_{n+1} &= a_n x^2 + x + 1 - \left(1 - \frac{1}{4a_n} \right) \\ &= a_n \left(x^2 + \frac{1}{a_n} x + \frac{1}{4a_n^2} \right) \\ &= a_n \left(x + \frac{1}{2a_n} \right)^2 \\ &\geq 0 \quad (a_n = \frac{n+2}{2n+2} > 0 \text{ より}) \end{aligned}$$

となるから、

$$a_n x^2 + x + 1 \geq a_{n+1}$$

が示せた。

(証明終)

(4)

正の整数 n に対して、

$$x^{2n} + x^{2n-1} + x^{2n-2} + \cdots + x^2 + x + 1 \geq a_n \quad \cdots \textcircled{2}$$

がすべての実数 x に対して成り立つことを数学的帰納法によって証明する。

[1] $n=1$ のとき

このとき、

$$\begin{aligned} x^2 + x + 1 - a_1 &= x^2 + x + \frac{1}{4} \\ &= \left(x + \frac{1}{2} \right)^2 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

となるから、 $n=1$ のとき $\textcircled{2}$ は成り立つ。

[2] $n=k$ のとき

$$x^{2k} + x^{2k-1} + x^{2k-2} + \cdots + x^2 + x + 1 \geq a_k \quad \cdots \textcircled{3}$$

が成り立つと仮定する。このとき、

$$\begin{aligned} &x^{2k+2} + x^{2k+1} + x^{2k} + \cdots + x^2 + x + 1 - a_{k+1} \\ &= (x^{2k} + x^{2k-1} + x^{2k-2} + \cdots + x^2 + x + 1) x^2 + x + 1 - a_{k+1} \\ &\geq a_k x^2 + x + 1 - a_{k+1} \quad (\because \textcircled{3}) \\ &\geq 0 \quad (\because (3)) \end{aligned}$$

となるから、 $n=k+1$ のときも $\textcircled{2}$ は成り立つ。

以上、[1], [2] より、 n が正の整数のときすべての実数 x に対して $\textcircled{2}$ が成り立つことが示せた。

(証明終)